

INSTITUT GALILÉE : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
AU CALCUL SCIENTIFIQUE

Inria



RAPPORT DE STAGE

DEUXIÈME ANNÉE

Simulation pour l'équation des ondes

Auteur:

Clément MARADEI

Encadrant:

Michel KERN

Janvier - Février 2023

Table des Matières

1	Modèles physiques pour l'équation des ondes	4
1.1	L'équation des ondes issue des équations d'Euler	4
1.2	L'équation des ondes issue de la théorie de l'élasticité linéaire	5
2	L'équation des ondes en dimension 1	7
2.1	Rappels théoriques	7
2.1.1	Modèle mathématique	7
2.1.2	Propagation à vitesse finie	7
2.1.3	Conservation d'énergie	8
2.2	Schéma de différences finies d'ordre 2 pour le cas homogène	8
2.3	Consistance	10
2.4	Calcul de la solution approchée	11
2.5	Validation du code	11
2.5.1	Représentation graphique	11
2.5.2	Calcul de l'erreur	13
2.5.3	Représentation de l'erreur en espace temps pour le cas $\Delta t = c\Delta x$	15
2.6	Economie en mémoire	15
3	L'équation des ondes acoustiques en dimension 2	17
3.1	Modèle de propagation dans \mathbb{R}^2	17
3.1.1	Energie du système	17
3.2	Modèle avec les conditions aux limites	17
3.3	Les conditions aux limites absorbantes	18
3.3.1	Caractère dissipatif des conditions absorbantes	20
3.4	Formulation variationnelle	21
3.4.1	Problème continu	21
3.4.2	Problème discret en espace	21
3.4.3	Problème discret en temps	22
3.4.4	Initialisation	23
3.4.5	Condition de stabilité	23
3.5	Implémentation	26
3.5.1	Code de résolution	26
3.5.2	Etude numérique de la convergence	27
3.5.3	Ordre de convergence estimé	27
3.6	Exemples	28
3.6.1	Illustration pour les conditions absorbantes	28
3.6.2	Onde réfléchie par des conditions de Neumann	30
4	L'équation des ondes en dimension 2 avec des termes d'amortissement	32
4.1	Modèle avec les conditions aux limites	32
4.2	Formulation variationnelle	32
4.2.1	Estimation d'énergie	32
4.2.2	Problème continu	32
4.2.3	Problème discret en espace	33
4.2.4	Problème discret en temps	33
4.2.5	Initialisation	34
4.2.6	Vérification	35
4.2.7	Ordre de convergence estimé	36

4.3	Modèle avec les Perfectly Matched Layers	37
4.3.1	Système d'équations avec PML	37
4.3.2	Formulation variationnelle avec discrétisation en temps et en espace	38
4.3.3	Code de résolution	39
4.3.4	Expérience	40
4.3.5	Simulation numérique	41
4.3.6	Captures d'écrans	41
4.3.7	Sismogrammes pour les modèles acoustiques et visqueux	42
4.3.8	Contribution de γ et η à l'atténuation de la solution	44
4.3.9	Comparaison de l'amortissement suivant les valeurs de η et γ	46
4.3.10	Sismogrammes pour les amortissements γ et η	47

Liste des Figures

1	Cône de dépendance	7
2	Représentation de la solution analytique	12
3	Représentation de la solution numérique	12
4	Représentation du taux de convergence en échelle logarithmique	14
5	Différence entre la solution réelle et la solution approchée pour $\alpha < 1$	15
6	Différence entre la solution réelle et la solution approchée pour $\alpha = 1$	15
7	Représentation d'une ondelette de Ricker avec $\omega = 30s^{-1}$, $t_0 = 0.05s$	28
8	Captures d'écrans pour la solution sans conditions absorbantes	29
9	Captures d'écrans pour la solution avec conditions absorbantes	29
10	Captures d'écrans de la solution à des temps différents	30
11	Représentation de la solution numérique (à gauche) et de la solution analytique (à droite) au temps T	35
12	Différence en valeur absolue au temps T entre la solution numérique et la solution analytique.	36
13	Représentation des fonctions ξ_1 et ξ_2	38
14	Schéma de l'expérience	40
15	Captures d'images pour le modèle diffus-visqueux	41
16	Captures d'images pour le modèle acoustique	41
17	Captures d'images 3D pour le modèle diffus-visqueux	42
18	Captures d'images 3D pour le modèle acoustique	42
19	On représente en rouge pointillé le sismogramme issue du modèle acoustique et en bleu celui issu du modèle avec amortissement. Capteurs 2	44
20	On représente en rouge pointillé le sismogramme issue du modèle acoustique et en bleu celui issu du modèle avec amortissement. Capteurs 1	44
21	Captures d'images pour le modèle avec $\gamma = 0$	44
22	Comparaison du modèle acoustique et visqueux sur sismogrammes.	45
23	Captures d'images avec amortissement γ	47
24	Captures d'images avec amortissement η	47
25	Sismogrammes (Capteurs 1)	48
26	Sismogrammes (Capteurs 2)	48

Introduction

L'équation des ondes trouve des applications dans de nombreux domaines qui ont chacun des spécificités. Par exemple, en modélisation sismique on cherche à modéliser la propagation d'ondes au sein de divers milieux sous-terrains. Ces milieux souvent non homogènes ne sont pas des milieux élastiques, c'est-à-dire qu'on observe un phénomène d'atténuation intrinsèque. Lorsque les ondes se propagent, l'énergie mécanique est transformée en énergie thermique en raison de la friction et du changement de viscosité. C'est un phénomène qui est particulièrement évident lorsque qu'il y a un contact avec des liquides, des gaz ou plus généralement des milieux poreux. Il en résulte une perte d'amplitude pour l'onde. Il a également été observé un phénomène de dépendance entre la fréquence des ondes réfléchies et la saturation en liquide des milieux poreux. Pour mettre en lumière ces phénomènes, le modèle des ondes acoustiques ne suffit pas et ne rend pas compte de la réalité. Il est nécessaire de l'adapter aux spécificités du milieu. Pour ça, il a été proposé à travers plusieurs articles [8, 7, 10, 11] d'ajouter deux termes, l'un est un terme de diffusion, l'autre d'amortissement visqueux. A partir de ces travaux, nous allons construire plusieurs modèles mathématiques pour finalement aboutir à une méthode numérique permettant d'inclure ces nouveaux paramètres.

Après avoir étudié le cas le plus simple d'un milieu purement acoustique, nous reproduirons une expérience [10] qui modélise la propagation d'une onde dans le cadre d'un milieu multi-phasique. Puis dans le but d'analyser le rôle de chacun des termes additionnels, nous proposons d'effectuer plusieurs simulations en faisant varier les paramètres d'amortissements.

1 Modèles physiques pour l'équation des ondes

L'équation des ondes peut être dérivée mathématiquement de plusieurs modèles. Dans cette partie on propose de montrer comment l'obtenir à partir de deux modèles physiques simples : Les équations d'Euler pour la mécanique des fluides et la théorie de l'élasticité linéaire avec les équations de Navier [3].

1.1 L'équation des ondes issue des équations d'Euler

En supposant que le fluide est isotherme, on considère les deux équations suivantes qui sont les équations d'Euler pour la mécanique des fluides.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = 0 & (a) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p & (b) \end{cases}$$

p est la pression thermodynamique, v la vitesse et ρ la densité. On suppose que la pression ne dépend que de la densité et on peut alors établir à travers une équation d'état :

$$p = p(\rho).$$

En considérant une perturbation de l'état on peut écrire :

$$\begin{cases} p = p_0 + p_1 \\ v = v_0 + v_1 \end{cases}$$

avec

$$p_0 = p(\rho_0) \text{ et } v_0 = 0$$

On obtient en remplaçant dans (a), (b) et en utilisant l'équation d'état :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1) + \nabla \cdot (\rho_0 + \rho_1)v_1 = 0 \\ (\rho_0 + \rho_1) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla \right) v_1 = -\nabla(p_0 + p_1) \\ p_0 + p_1 = p(\rho_0 + \rho_1) \end{cases}$$

Les termes d'ordre 0 s'éliminent et en négligeant les termes d'ordre supérieur on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 + \nabla \cdot \rho_0 v_1 = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \nabla p_1 = 0 \end{cases}$$

Puis en effectuant un développement de Taylor :

$$p_0 + p_1 = p(\rho_0, s_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_0 \rho_1^2 + \dots$$

p est une fonction croissante de ρ , on peut faire le choix d'écrire $(\frac{\partial p}{\partial \rho})_0 = c^2$. Et donc en considérant uniquement les termes du premier ordre, on a :

$$p_1 = c^2 \rho_1$$

Ce qui permet d'écrire le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 + \rho_0 \nabla v_1 = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \nabla p_1 = 0 \\ p_1 = c^2 \rho_1 \end{cases}$$

On dérive en temps la première équation, on applique le gradient sur la deuxième, en remplaçant on obtient l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \nabla^2 p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \nabla p_1 = 0 \end{cases}$$

1.2 L'équation des ondes issue de la théorie de l'élasticité linéaire

Dans la théorie de l'élasticité linéaire on suppose que les effets mécaniques et thermiques sont découplés. Cela est vrai dans les cas de problèmes d'évolution isothermes et adiabatiques, c'est-à-dire quand il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur. En prenant l'équation de Newton, on considère alors le tenseur des déformations linéarisées avec les composantes

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

qui est une fonctionnelle linéaire du champs de déplacements

$$u_i(a, t) = x_i - a_\alpha \delta_{i\alpha}$$

La loi de comportement élastique donne une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéarisées qu'on note avec les conventions de sommation habituelles.

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \epsilon_{kl}(u)$$

La loi de comportement de Hooke est introduite de façon à expliciter la relation suivante pour σ .

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(u)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé qui peuvent éventuellement dépendre de x . En faisant l'hypothèse que le milieu est homogène, on peut les considérer comme constants. On a alors l'équation vectorielle suivante dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \mu \Delta \vec{U} - (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{U} = \vec{f}$$

Désormais en considérant comme données \vec{f} dans Ω et $\vec{U}(P)$ sur Γ , on peut prendre comme inconnu \vec{U} et aboutir à une des équations de Navier avec les conditions au limites :

$$-\mu \Delta \vec{U} - (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{U} = \vec{f}, \quad x \in \Omega$$

$$\vec{U}(P) = \vec{U}(P), \quad \text{sur } \Gamma$$

En prenant $\theta = \text{div } \vec{U}$ la dilatation volumique avec $\vec{f} = \vec{\nabla} \mathcal{U}$ étant le champs de pesanteur, on obtient en appliquant l'opérateur de divergence sur l'équation le système

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta \theta = \Delta \mathcal{U} \\ \theta(x, 0) = \theta^0(x) \quad \text{avec } \theta^0 = \text{div } \vec{U}^0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, 0) = \theta^1(x) \quad \text{avec } \theta^1 = \text{div } \vec{U}^1 \end{cases}$$

Qui est de la forme

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Delta \Psi = g \\ \Psi(x, 0) = \Psi^0(x) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = \Psi^1(x) \end{cases}$$

Avec $c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}$ et $\Psi = \theta$. On obtient bien l'équation des ondes.

2 L'équation des ondes en dimension 1

2.1 Rappels théoriques

2.1.1 Modèle mathématique

On peut donc écrire l'équation des ondes sans terme source de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T] \\ u(x, t = 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

Dans ce modèle il n'y a pas de conditions aux limites, c'est un problème de Cauchy. Il est bien posé, la formule de D'Alembert illustre ce résultat :

Théorème. Existence et unicité - Formule de d'Alembert

Soient $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ du problème de Cauchy (1), définie par la formule de d'Alembert :

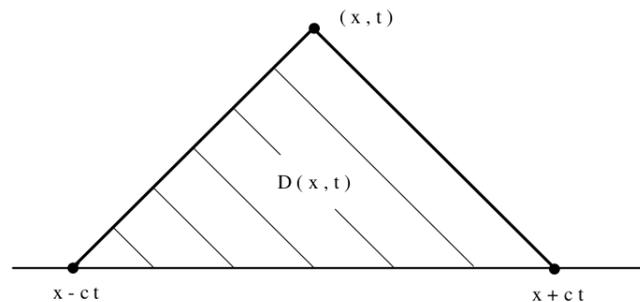
$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy.$$

2.1.2 Propagation à vitesse finie

Cette formule permet d'établir le cône de dépendance pour un point donné (t, x) qui ne dépend que des valeurs de u_0 et u_1 dans l'intervalle $[x - ct, x + ct]$. On le note

$$D_{x,t} := \{(s, y) | 0 \leq s \leq t, |y - x| \leq c(y - s)\}.$$

Figure 1: Cône de dépendance



La solution $u(x, t)$ ne dépend que des valeurs dans le cône $D_{x,t}$. On peut en déduire une propriété essentielle pour les ondes qui est leur propagation à vitesse finie. En partant de données initiales u_0 et u_1 à support compact $[a, b]$, alors la solution u reste à support compact $[a - ct, b + ct]$ pour tout t .

2.1.3 Conservation d'énergie

Une autre propriété importante pour l'équation des ondes est la conservation de l'énergie au cours du temps. On définit l'énergie à l'instant t :

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (|\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)|^2 + c^2 |\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)|^2) dx$$

On montre que $\forall t > 0$, on a $E(t) = E(0)$.

On multiplie (1) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur Ω . On a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)) \frac{\partial u}{\partial t} dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)|^2 dx - c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)|^2 dx + c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t, x) dx - c^2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)|^2 dx + \frac{c^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)|^2 dx = \frac{d}{dt} E(t) \end{aligned}$$

En supposant que u_0 et u_1 sont à support compact, on déduit à l'aide de la propriété de propagation à vitesse finie que $u(x, t)$ l'est aussi. Les termes de bords issus de l'intégration par partie sont alors bien égaux à 0. Ce qui montre que E une fonction qui reste constante au cours du temps. $E(t) = E(0)$, $\forall t > 0$. On en déduit que si u est une solution de (1) avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ alors $u = 0$, ce qui donne l'unicité.

2.2 Schéma de différences finies d'ordre 2 pour le cas homogène

Dans cette partie, on propose un schéma afin de résoudre numériquement (1). On considère un domaine espace-temps de la forme $[0, b] \times [0, T]$. On introduit un découpage en temps avec N_t points et en espace avec N_x points :

- $\Delta t = \frac{T}{N_t}$ est le pas de temps, on note $t^n = n\Delta t \quad \forall n \in [0, N_t]$
- $\Delta x = \frac{b}{N_x}$ est le pas en espace, on note $x_j = j\Delta x \quad \forall j \in [0, N_x]$
- On note u_j^n l'approximation de $u(x_j, t^n) \quad \forall n \in [0, N_t], \forall j \in [0, N_x]$

On utilise les opérateurs de différences finies d'ordre 2 suivants :

$$\begin{aligned} [D_t D_t u]_j^n &\approx \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \\ [D_x D_x u]_j^n &\approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

Pour conserver l'ordre, il est nécessaire de d'approcher également les conditions initiales avec un ordre 2 également.

$$u_j^0 = u_0(x_j) \quad \forall j \in [0, N_x]$$

Pour le calcul de u_j^1 on effectue le développement de *Taylor*

$$u(x_j, \Delta t) = u_0(x_j) + \Delta t u_1(x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, 0) + O(\Delta t^3)$$

En utilisant (1) on obtient :

$$u(x_j, \Delta t) = u_0(x_j) + \Delta t u_1(x_j) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, 0) + O(\Delta t^3)$$

On a ajouté une erreur en $O(\Delta x^2)$, ce qui donne finalement comme approximation :

$$u_j^1 \approx u_j^0 + \Delta t u_1(x_j) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0}{\Delta x^2}$$

Le schéma numérique s'écrit donc :

Trouver $u_j^n \quad \forall n \in [0, N_t], j \in [0, N_x]$ tel que :

$$u_j^0 = u_0(x_j) \quad \forall j \in [0, N_x] \quad (2)$$

$$u_j^1 = u_j^0 + \Delta t u_1(x_j) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0}{\Delta x^2} \quad \forall j \in [1, N_x - 1] \quad (3)$$

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad \forall t \in [2, N_t], \quad \forall j \in [1, N_x - 1] \quad (4)$$

$$u_0^n = u_l(x_j) \text{ et } u_{N_x}^n = u_r(x_j) \quad \forall n \in [0, N_t] \quad (5)$$

Où u_r et u_l sont les conditions aux limites. Pour l'implémenter de manière plus efficace avec Matlab, il est nécessaire de l'écrire comme produit de matrices et de vecteurs. En posant $u_h^n = (u_j^n)_{j \in [1, N_x - 1]}$ on a donc le système suivant :

$$\begin{aligned} u_h^0 &= u_0 h \\ u_h^1 &= \left(I - \frac{\Delta t^2}{2} A_h\right) u_h^0 + \Delta t u_{1h} \\ u_h^{n+1} &= -A_h u_h^n \Delta t^2 + 2u_h^n - u_h^{n-1} \quad \forall n \in [1, N_t - 1] \\ u_0^n &= u_l(x_j) \text{ et } u_{N_x}^n = u_r(x_j) \quad \forall n \in [0, N_t] \end{aligned}$$

avec

$$(A_h u_h)_j^n = -c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$A_h = -c^2 A \quad A = \frac{-1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A est la matrice du Laplacien de dimension $(N_x - 2) \times (N_x - 2)$. On a un schéma explicite en temps car u_h^{n+1} s'exprime en fonction de u_h^n et u_h^{n-1} .

2.3 Consistance

On considère u une solution régulière de (1) et on note $\bar{u}_j^n = u(x_j, t^n)$. On définit l'erreur de troncature pour notre schéma par :

$$\epsilon_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n-1}}{\Delta t^2} + (A_h \bar{u}_h)_j^n \quad n \in [0, Nt], j \in [0, Nx]$$

On dit que le schéma est consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Il est consistant d'ordre m en temps et k en espace si :

$$\epsilon_j^n = O(\Delta t^m + \Delta x^k)$$

Avec les opérateurs de différences finies choisis, on peut écrire en utilisant des formule de Taylor

$$\begin{aligned} [D_t D_t \bar{u}]_j^n &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + \frac{2}{4!} \Delta t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t^n) + O(\Delta t^4) \\ [D_x D_x \bar{u}]_j^n &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \frac{2}{4!} \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) + O(\Delta x^4) \end{aligned}$$

En multipliant le deuxième opérateur par $-c^2$ et en additionnant, on a donc l'erreur de troncature :

$$\epsilon_j^n = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \frac{2}{4!} \left[\Delta t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t^n) - c^2 \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) \right] + O(\Delta t^4 + \Delta x^4)$$

En utilisant le fait que u soit solution de l'équation des ondes, on a :

$$\epsilon_j^n = \frac{2}{4!} \left[\Delta t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t^n) - c^2 \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) \right] + O(\Delta t^4 + \Delta x^4)$$

En reprenant l'équation des ondes, on a la relation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

Puis en dérivant deux fois par rapport à t :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t) = c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x, t) = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t)$$

En notant $\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$:

$$\epsilon_j^n = \frac{2}{4!} c^2 \Delta x^2 (\alpha^2 - 1) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) + O(\Delta t^4 + \Delta x^4)$$

Finalement le schéma est consistant d'ordre 2 mais le premier terme s'annule lorsque $\alpha = 1$. On gagne donc un ordre dans ce cas là. On peut montrer en faisant une décomposition de u en somme d'ondes progressives que l'erreur de troncature est en fait nulle. On appelle la condition $\alpha < 1$ la condition CFL qui est également une condition de stabilité.

2.4 Calcul de la solution approchée

Dans un premier temps, on implémente l'algorithme suivant qui permet d'obtenir la solution dans un tableau espace temps:

Algorithm 1 Approximation de la solution d'ordre 2 avec conditions aux limites de *Dirichlet*

Input: $x, t, c, u0, u1, cl_a, cl_b$

Output: $u \leftarrow \text{calculu}(x, t, c, u0, u1, cl_a, cl_b)$

```
1:  $dx \leftarrow x(2) - x(1)$ 
2:  $dt \leftarrow t(2) - t(1)$ 
3:  $Nx \leftarrow \text{length}(x)$ 
4:  $Nt \leftarrow \text{length}(t)$ 
5:  $Kc \leftarrow c^2 dt^2 / dx^2$ 
6:  $Lap \leftarrow \text{Lap1D}(Nx - 2)$  ▷ Renvoie la matrice tridiagonale du Laplacien 1d
7:  $u \leftarrow \text{zeros}(Nt, Nx)$ 
8:  $u(2, 2 : Nx - 1) \leftarrow (\text{eye}(Nx - 2) - (Kc/2) * Lap(Nx - 2)) * u(1, 2 : Nx - 1) + dt * u1(2 : Nx - 1)$ 
9:  $u(:, 1) \leftarrow cl_a$  ▷ CL au point a pour tous les pas de temps
10:  $u(:, Nx) \leftarrow cl_b$  ▷ CL au point b pour tous les pas de temps
11: for  $n = 2 : Nt - 1$  do
12:    $u(n+1, 2 : Nx - 1) \leftarrow -(Kc) * Lap * u(n, 2 : Nx - 1) + 2 * u(n, 2 : Nx - 1) - u(n-1, 2 : Nx - 1)$ 
13: end for
```

La solution est représentée dans un tableau dont les lignes représentent les pas de temps et les colonnes les pas en espace.

2.5 Validation du code

2.5.1 Représentation graphique

Pour valider le code, il est nécessaire de le faire fonctionner avec une fonction de référence. On va choisir les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sin(2\pi x) & \forall x \in [0, 1] \\ u_1(x) &= 0 & \forall x \in [0, 1] \end{aligned}$$

On trouve la solution analytique à l'aide de la formule de d'Alembert :

$$u(x, t) = \cos(2\pi t) \sin(2\pi x) \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

On peut tout d'abord tracer graphiquement la fonction ainsi que son approximation pour chaque pas de temps ou les représenter directement en espace temps de la manière suivante :

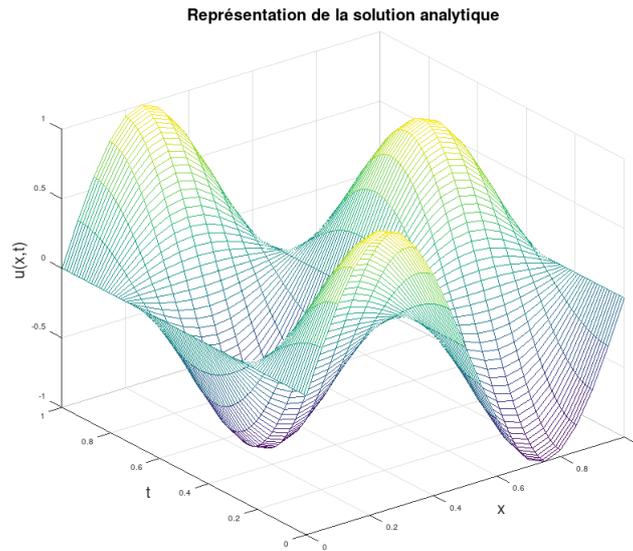


Figure 2: Représentation de la solution analytique

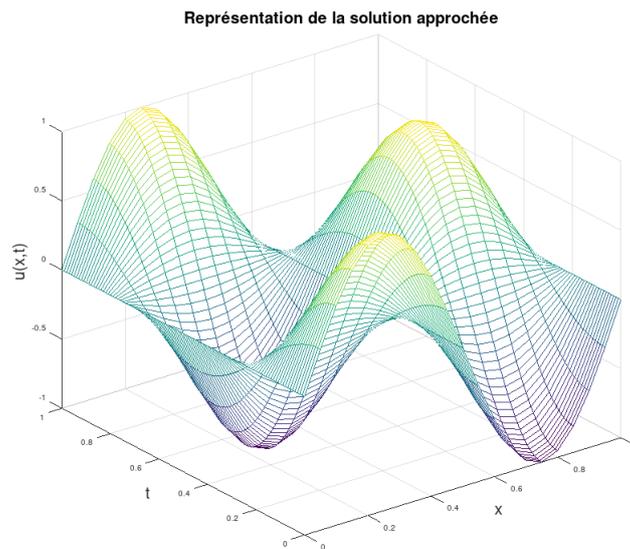


Figure 3: Représentation de la solution numérique

Un pas de 0.01 en temps et de 0.05 en espace a été utilisé.

2.5.2 Calcul de l'erreur

De façon à vérifier que l'ordre de la méthode est bien 2, on met au point le programme qui fonctionne de la manière suivante avec les paramètres correspondant à la solution que nous souhaitons approcher. On compare la solution numérique à la solution exacte. L'erreur est en $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ qui est équivalent à $O(\Delta x^2)$ car $\Delta t = \alpha \Delta x$.

Algorithm 2 Calcul de l'erreur

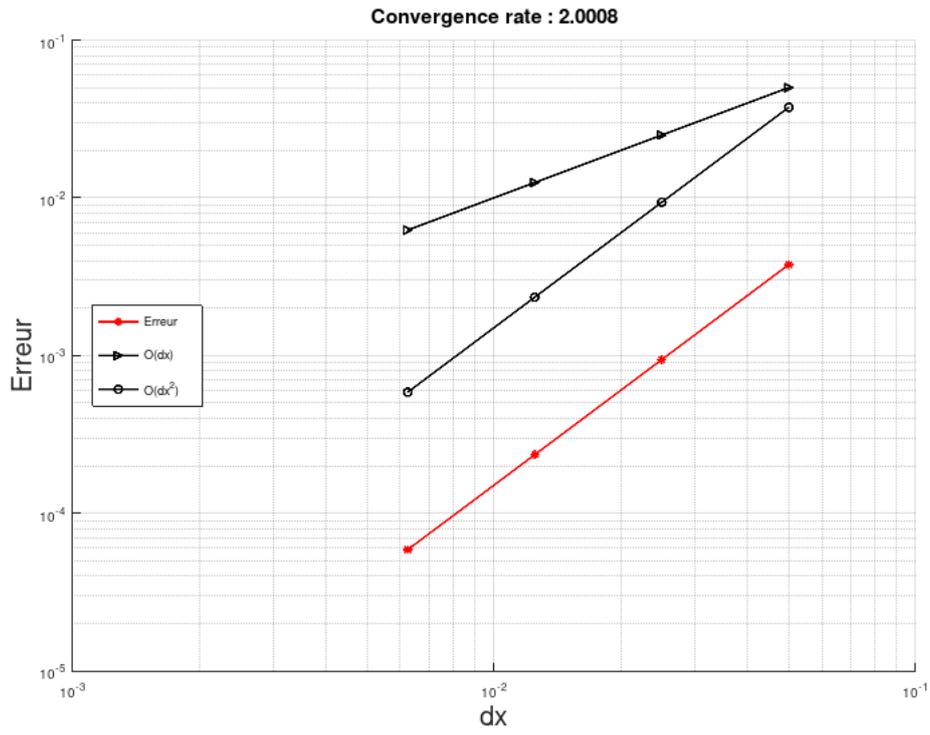
Input: a, b, c, T, dx, dt

Output: $erreur$

```
1: Initialisation des paramètres
2: Initialisation d'un vecteur erreur
3:  $n_{pas} \leftarrow 4$ 
4:  $erreur \leftarrow \text{zeros}(1, n_{pas})$ 
5: Calcul de l'erreur
6: for  $i = 1 : n_{pas}$  do
7:    $x \leftarrow a : dx : b$ 
8:    $t \leftarrow 0 : dt : T$ 
9:    $u0 \leftarrow u_0(x)$  ▷ Appelle la fonction  $u_0(x)$ 
10:   $u1 \leftarrow \text{zeros}(1, \text{length}(x))$ 
11:   $u_{reel} \leftarrow u_{reel}(x, t)$  ▷ Donne la solution exacte
12:   $u \leftarrow \text{calculu}(x, t, c, u0, u1)$  ▷ Utilise l'algorithme 1
13:   $DX(i) \leftarrow dx$ 
14:   $erreur(i) \leftarrow erreur_f(u, u_{reel}, dx, dt)$  ▷ Appelle une fonction qui calcule la norme  $L^2$ 
15:   $dx \leftarrow dx/2$ 
16:   $dt \leftarrow dt/2$ 
17: end for
```

On représente graphiquement l'erreur en fonction du pas d'espace sur la figure 4 en plus de calculer le taux de convergence :

Figure 4: Représentation du taux de convergence en échelle logarithmique



On constate que l'erreur observée est parallèle à une droite de pente 2 conformément à ce qui est attendu par la théorie.

2.5.3 Représentation de l'erreur en espace temps pour le cas $\Delta t = c\Delta x$

En gardant la même solution de référence, on propose de représenter l'erreur pour le cas où $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$.

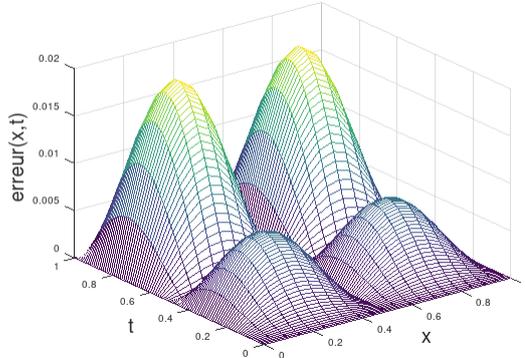


Figure 5: Différence entre la solution réelle et la solution approchée pour $\alpha < 1$

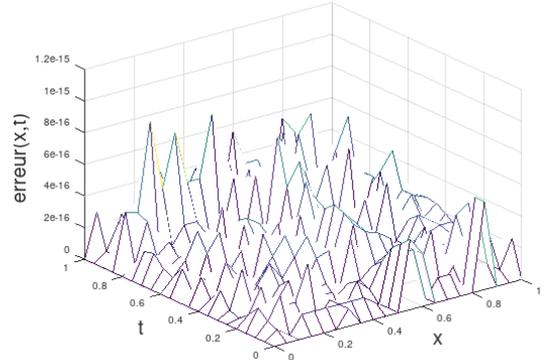


Figure 6: Différence entre la solution réelle et la solution approchée pour $\alpha = 1$

On a utilisé $dx = 0.01$, $dt = 0.05$ pour la figure 5 et $dx = 0.05$, $dt = 0.05$ pour la figure 6. Comme attendu on peut voir sur la figure sur 6 que la différence entre la solution approchée et la solution réelle est égale à 0 à la précision machine près dans le cas où l'on a $\Delta t = c\Delta x$. Effectivement les valeurs sur l'échelle verticale sont de l'ordre de 10^{-16} .

2.6 Economie en mémoire

Stocker la solution dans une matrice espace temps a l'inconvénient de requérir beaucoup d'espace en mémoire ($Nt \times Nx$), il est alors possible d'utiliser seulement 3 vecteurs à la place qui contiendront à chaque itération la solution pour les temps $n - 1$, n et $n + 1$.

Algorithm 3 Calcul de la solution approchée

Input: $x, t, c, u0, u1, cl_a, cl_b$ **Output:** U \triangleright Donne la valeur de la solution pour le dernier élément du vecteur t

```
1:  $dx = x(2) - x(1)$ 
2:  $dt = t(2) - t(1)$ 
3:  $Nx = \text{length}(x)$ 
4:  $Nt = \text{length}(t)$ 
5:  $Kc = (c^2 * dt^2)/(dx^2)$ 
6:  $Lap = \text{Lap1D}(Nx - 2)$   $\triangleright$  Renvoie la matrice tridiagonale du Laplacien 1d
7:  $U1 = \text{zeros}(1, Nx)$ 
8:  $U2 = \text{zeros}(1, Nx)$ 
9:  $U = \text{zeros}(1, Nx)$ 
10:  $U1 = u0$ 
11:  $U2(2 : Nx - 1) = (\text{eye}(Nx - 2) + (Kc/2) * Lap) * U1(2 : Nx - 1) + dt * u1(2 : Nx - 1)'$ 
12:  $U(1) = cl_a; U(Nx) = cl_b$   $\triangleright$  Conditions aux limites de Dirichlet
13:  $U1(1) = cl_a; U1(Nx) = cl_b$ 
14:  $U2(1) = cl_a; U2(Nx) = cl_b$ 
15: for  $n = 2 : Nt - 1$  do
16:    $U(2 : Nx - 1) = -(Kc) * Lap * U2(2 : Nx - 1) + 2 * U2(2 : Nx - 1) - U1(2 : Nx - 1)$ 
17:    $U1(2 : Nx - 1) = U2(2 : Nx - 1)$ 
18:    $U2(2 : Nx - 1) = U(2 : Nx - 1)$ 
19: end for
```

Cet algorithme calcule la valeur de la solution pour chaque pas de temps en utilisant les valeurs aux deux temps précédents qui sont ensuite écrasées. On peut retrouver l'erreur global en appelant une fonction à chaque pas de temps et vérifier la convergence avec le même procédé que pour le stockage précédent. De même si on souhaite afficher la solution, on peut le faire en appelant une fonction à chaque pas de temps. Les conditions aux limites sont introduites sous formes de vecteurs. Elles peuvent également dépendre du temps.

3 L'équation des ondes acoustiques en dimension 2

3.1 Modèle de propagation dans \mathbb{R}^2

En dimension 2, le modèle pour la propagation des ondes s'écrit de la manière similaire à celui de la partie 2.1.1 :

Trouver $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \operatorname{div}(\nabla u(x, t)) &= f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

3.1.1 Énergie du système

Comme pour le modèle en dimension 1, on peut donner une définition de l'énergie avec la quantité suivante :

$$\begin{aligned} E(u, t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

$\|\cdot\|_{L^2}$ et $\|\cdot\|_2$ désignent respectivement la norme L^2 scalaire et vectorielle. En dérivant par rapport au temps on a :

$$\frac{d}{dt} E(u, t) = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx \quad (6)$$

En utilisant la formule de Green

$$\frac{d}{dt} E(u, t) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \operatorname{div}(\nabla u(x, t)) \right] dx$$

Et en remplaçant, on obtient :

$$\frac{d}{dt} E(u, t) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) f(x, t) dx$$

On déduit de cette formule qu'entre deux instants t_1 et t_2 où le terme source est nul, l'énergie reste constante. De la même façon qu'en dimension 1, on déduit l'unicité de la solution.

3.2 Modèle avec les conditions aux limites

On considère maintenant Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et de frontière $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. On peut proposer un modèle avec des conditions aux limites :

Trouver $u : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \operatorname{div}(\nabla u(x, t)) = f(x, t) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall t \in]0, T[\quad (7)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (8)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

- Conditions de Dirichlet : $u(x, t) = g_1(x, t) \quad \forall x \in \Gamma_1, \quad \forall t \in]0, T[$
- Conditions absorbantes : $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_2, \quad \forall t \in]0, T[$
- Conditions de Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) - g_2(x, t) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_3, \quad \forall t \in]0, T[$

Avec $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ où n représente la normale sortante à Ω le long de Γ .

3.3 Les conditions aux limites absorbantes

On a donc introduit sur une partie du bord des conditions aux limites absorbantes. Les modèles de propagation d'ondes trouvent des applications dans des domaines qui sont non bornés. C'est le cas en sismologie où on cherche à simuler le comportement des ondes au sein de la terre. Nos simulations elles, doivent s'effectuer dans un domaine borné où les bords sont donc des frontières artificielles imposées par des contraintes numériques. Il est alors nécessaire pour rendre compte de la réalité physique d'adapter notre modèle. Dans cette optique, les conditions dites absorbantes ont pour but d'éviter des réflexions non désirées dans le domaine d'observation. On cherche donc à obtenir de telles conditions tout en les exprimant d'une manière suffisamment simple pour être implémentées. Pour ça, on reprend la démonstration de Frédéric Nataf [9].

On considère l'équation des ondes et sa solution connue dans un domaine extérieur à Ω , un sous ensemble borné de \mathbb{R}^2 , $\Omega^c = \mathbb{R} \setminus \Omega$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= f(t, x, y), \quad (x, y) \in \Omega^c, \quad t > 0 \\ u(0, x, y) &= u_0, \quad (x, y) \in \Omega^c \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y) &= u_1, \quad (x, y) \in \Omega^c \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

On va tronquer le domaine sur lequel nous effectuons la simulation numérique par une frontière artificielle sur l'axe $x = 0$ qu'on note Γ . Parce que la solution n'est pas connue sur cette frontière, on cherche une relation satisfaite par u qui ne dépend pas du terme source f . C'est cette relation qui va nous permettre de définir une condition absorbante. Dans un souci d'implémentation, on va l'approcher par une équation aux dérivées partielles par la suite. On choisit d'abord un problème modèle pour la solution u avec le sous domaine tel $x \geq 0$ sans considérer de conditions aux limites sur Γ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 0, \quad x \geq 0, y \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(0, x, y) &= u_0, \quad x \geq 0, y \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y) &= 0, \quad x \geq 0, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Comme u n'est définie que pour $x \geq 0$, on va la prolonger par 0 de manière à appliquer la transformée de Fourier définit pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-i\xi x) dx.$$

On note \tilde{u} ce prolongement. On prend alors la transformée de Fourier en t et en y en notant les variables duales respectivement ω et k . On a alors la relation :

$$-\omega^2 \tilde{u} - c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + c^2 k^2 \tilde{u} = 0$$

avec son équation caractéristique

$$(c^2 k^2 - \omega^2) \lambda - c^2 \lambda^2 = 0$$

Pour un couple (ω, k) , on peut résoudre l'équation différentielle d'ordre 2. Une solution est donnée par

$$\tilde{u}(\omega, x, k) = \alpha_+(\omega, k) \exp(\lambda_+(\omega, k)x) + \alpha_-(\omega, k) \exp(\lambda_-(\omega, k)x)$$

On a décomposé suivant les valeurs de λ qui est solution de l'équation caractéristique et on a :

$$\lambda^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Suivant le signe que prend $c^2 k^2 - \omega^2$ on distingue deux cas :

- $|k| > \frac{\omega}{c} : \lambda^\pm = \pm \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$
- $|k| < \frac{\omega}{c} : \lambda^\pm = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}}$

Le premier cas correspond à des ondes évanescentes. Le deuxième à des ondes de propagation. On applique désormais la transformée de Fourier inverse et on décompose l'intégrale suivant les deux cas précédents et le signe de λ .

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x, y) = & \iint_{|k| > \frac{\omega}{c}} \alpha_-(\omega, k) \exp\left(-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} x\right) \exp(i(\omega t + ky)) dk d\omega \\ & + \iint_{|k| < \frac{\omega}{c}} \alpha_-(\omega, k) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}} x + ky\right)\right) dk d\omega \\ & + \iint_{|k| > \frac{\omega}{c}} \alpha_+(\omega, k) \exp\left(\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} x\right) \exp(i(\omega t + ky)) dk d\omega \\ & + \iint_{|k| < \frac{\omega}{c}} \alpha_+(\omega, k) \exp\left(i\left(\omega t + \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}} x + ky\right)\right) dk d\omega \end{aligned}$$

Deux termes de cette expression sont nuls. On sait que \tilde{u} est borné, cependant $\exp\left(-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} x\right)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini ce qui impose $\alpha_+(\omega, k) = 0, \forall(\omega, k)$ tels que $|k| > \frac{\omega}{c}$, le troisième terme est nul. Le 4ème terme correspond à une combinaison linéaire d'ondes se propageant dans la direction $-x$. On a donc $\alpha_+(\omega, k) = 0 \forall(\omega, k)$ tels que $|k| < \frac{\omega}{c}$. On a donc :

$$\tilde{u}(\omega, x, k) = \alpha_-(\omega, k) \exp(\lambda_-(\omega, k)x) \quad \text{car} \quad \alpha_+(\omega, k) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t, x, y) = & \iint_{|k| > \frac{c}{\omega}} \alpha_-(\omega, k) \exp\left(-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} x\right) \exp(i(\omega t + ky)) dk d\omega \\ & + \iint_{|k| < \frac{c}{\omega}} \alpha_-(\omega, k) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}} x + ky\right)\right) dk d\omega\end{aligned}$$

En prenant $x = 0$ dans les deux expressions, on a :

$$\alpha_-(\omega, k) = \hat{u}(\omega, 0, k)$$

En remplaçant et en dérivant par rapport à t on obtient la relation :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, 0, y) - \iint \hat{u}(\omega, 0, k) \lambda^-(\omega, k) \exp(i(\omega t + ky)) dk d\omega = 0$$

C'est donc cette expression qui va nous servir de conditions aux limites. Toujours en notant les variables duales ω et k , On peut écrire cette expression dans l'espace de Fourier correspondant comme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(\omega, 0, k) - \lambda^-(\omega, k) \hat{u}(\omega, 0, k) &= 0 \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(\omega, 0, k) + i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}} \hat{u}(\omega, 0, k) &= 0\end{aligned}$$

Les petites valeurs de $c \frac{k}{\omega}$ correspondent aux ondes dont la direction de propagation est proche de la normale sortante le long de la frontière artificielle. On fait alors un développement de Taylor d'ordre 0 en $c \frac{k}{\omega}$ pour obtenir comme approximation

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(\omega, 0, k) + i \frac{\omega}{c} \hat{u}(\omega, 0, k) = 0$$

Et en appliquant la transformée de Fourier inverse, on a finalement

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0, y) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y) = 0$$

Qu'on généralise pour tous les domaines en l'exprimant sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0, y) + c \frac{\partial u}{\partial n}(t, 0, y) = 0$$

où n est la normale sortante à Ω le long de $\partial\Omega$.

3.3.1 Caractère dissipatif des conditions absorbantes

En imposant de telles conditions on s'attend donc à avoir une dissipation d'énergie au sein du système puisque l'amplitude des ondes va être réduite à 0 au contact des bords. On peut vérifier cette propriété en considérant un terme source nul et en imposant des conditions absorbantes sur tous les bords. On reprend (6) en intégrant par partie pour trouver :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(u, t) &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \operatorname{div}(\nabla u(x, t)) \right] dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(s, t) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds \\ \frac{d}{dt}E(u, t) &= -\frac{1}{c} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds = -\frac{1}{c} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 ds \leq 0\end{aligned}$$

On a donc bien une variation d'énergie négative.

3.4 Formulation variationnelle

3.4.1 Problème continu

On considère l'espace $V = \left\{ v \mid v \in H^1(\Omega) \text{ et } v|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$. En multipliant par une fonction test $v \in V$ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) v(x) dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u(x, t)) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx \quad \forall v \in V$$

En utilisant la formule de Green et les conditions aux limites :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n}(s, t) v(s) ds - \int_{\Gamma_3} \frac{\partial u}{\partial n}(s, t) v(s) ds = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) v(s) ds - \int_{\Gamma_3} g_2(s, t) v(s) ds = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx$$

Ce qui nous donne $\forall v \in V$:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) v(s) ds = \int_{\Gamma_3} g_2(s, t) v(s) ds + \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx$$

3.4.2 Problème discret en espace

Pour la discrétisation en espace, on introduit une triangulation du domaine \mathcal{T}_h de sorte à avoir :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

avec $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} (|K|)$ et les restrictions standard sur les éléments du maillage (voir la référence [4]). On considère l'espace d'approximation suivant :

$$V_h^k(\Omega) = \left\{ v \in C^0(\Omega), \forall K, v|_K \in P_k \text{ et } v|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

Notre problème discret se formule de la manière suivante :

$$\text{Trouver } u_h :]0, T[\longrightarrow V_h^k \text{ tel que } \forall v \in V_h^k$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u_h v_h dx + \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h dx + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_2} u_h v_h ds = \int_{\Gamma_3} g_2(t) v_h ds + \int_{\Omega} f(t) v_h dx \quad (9)$$

Avec les conditions initiales :

$$u(\cdot, 0) = u_{0,h} \text{ et } \frac{du_h}{dt}(\cdot, 0) = u_{1,h} \text{ dans } \Omega \quad (10)$$

où $u_{0,h}$ et $u_{1,h}$ sont des approximations de u_0 et u_1 . On est donc amené à résoudre un système d'équations différentielles en dimension finie avec des conditions initiales.

3.4.3 Problème discret en temps

On introduit une discrétisation régulière du temps $(t_n)_n = t_0 + n\Delta t$ pour $n \in [0, Nt]$ avec $Nt\Delta t = T$ et en notant $u_h^n = u_h(t_n)$. une approximation de la solution analytique au temps t_n . On va utiliser une méthode de différences finies en temps et rendre le schéma implicite avec un paramètre θ pour préparer le cas avec les termes de diffusion et d'amortissement. On utilise donc :

$$\frac{d^2}{dt^2} u_h(t_n) \approx \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} \text{ et } \frac{d}{dt} u_h(t_n) \approx \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t}$$

Et

$$u_h^n \approx \theta u_h^{n+1} + (1 - 2\theta)u_h^n + \theta u_h^{n-1}$$

On remarque que le schéma est explicite lorsque $\theta = 0$.

Le problème s'écrit alors

$$\text{Trouver } (u_h)_{n \in [0, Nt]} \in (V_h^k)^{Nt+1} \text{ tel que } \forall v \in V_h^k$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} v_h dx + \int_{\Omega} \nabla(\theta u_h^{n+1} + (1 - 2\theta)u_h^n + \theta u_h^{n-1}) \nabla v_h dx + \frac{1}{c} \int_{\Gamma_2} \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t} v_h ds \\ & = \int_{\Gamma_3} g_2(t_n) v_h ds + \int_{\Omega} f(t_n) v_h dx \quad \forall n \in [1, Nt - 1] \end{aligned}$$

qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (u_h)_{n \in [0, Nt]} \in (V_h^k)^{Nt+1} \text{ tel que } \forall v \in V_h^k \\ & \int_{\Omega} u_h^{n+1} v_h dx + c^2 \Delta t \int_{\Omega} \theta \nabla u_h^{n+1} \nabla v_h dx + \frac{c}{2} \Delta t \int_{\Gamma_2} u_h^{n+1} v_h ds \\ & = \int_{\Omega} (2u_h^n - u_h^{n+1}) v_h dx - c^2 \Delta t^2 \int_{\Omega} ((1 - 2\theta) \nabla(u_h^n) + \theta \nabla(u_h^{n-1})) \nabla v_h dx \\ & \quad + \Delta t^2 c^2 \int_{\Omega} f(t_n) v_h dx + \Delta t^2 c^2 \int_{\Gamma_3} g_2(t_n) v_h ds + \frac{c}{2} \Delta t \int_{\Gamma_2} u_h^{n-1} v_h ds \end{aligned}$$

Avec u_h^0 et u_h^1 données.

Il faut alors résoudre un problème variationnel de la forme $A(u_h^{n+1}, v_h) = L(v_h)$ pour chaque pas de temps.

$$A(u_h^{n+1}, v_h) = \int_{\Omega} u_h^{n+1} v_h dx + c^2 \Delta t \int_{\Omega} \theta \nabla u_h^{n+1} \nabla v_h dx + \frac{c}{2} \Delta t \int_{\Gamma_2} u_h^{n+1} v_h ds$$

$$\text{Et } L(v_h) = \int_{\Omega} (2u_h^n - u_h^{n-1}) v_h dx - c^2 \Delta t^2 \int_{\Omega} ((1 - 2\theta) \nabla(u_h^n) + \theta \nabla(u_h^{n-1})) \nabla v_h dx$$

$$+ \Delta t^2 c^2 \int_{\Omega} f(t_n) v_h dx + \Delta t^2 c^2 \int_{\Gamma_3} g_2(t_n) + \frac{c}{2} \Delta t \int_{\Gamma_2} u_h^{n-1} v_h ds$$

Ici, $u_h = (u_h^0, u_h^1, \dots, u_h^{N_t})$. Au temps t_{n+1} , u_h^n et u_h^{n-1} sont connus, ils font donc partie de la forme linéaire.

3.4.4 Initialisation

Afin de commencer le calcul de u_h^{n+1} pour $n \geq 1$. Il faut initialiser les valeurs de u_h^0 et u_h^1 sur le même principe qu'en dimension 1. Pour conserver l'ordre 2 du schéma, il est nécessaire d'approcher u_h^1 avec un ordre 2 également. Un développement de Taylor donne la formule suivante :

$$u_h^1 = u_{0,h} + \Delta t u_{1,h} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} u_h(0) + O(\Delta t^4)$$

On multiplie par une fonction test $v_h \in V_h^k(\Omega)$ et on intègre sur Ω pour obtenir :

$$\int_{\Omega} u_h^1 v_h dx \approx \int_{\Omega} u_{0,h} v_h dx + \Delta t \int_{\Omega} u_{1,h} v_h dx + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u_h(0) v_h dx$$

Ensuite on utilise l'équation semi-discrète sous sa forme variationnelle (9) et on a

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u_h v_h dx = c^2 \left(- \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h dx - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_2} u_h v_h ds + \int_{\Gamma_3} g_2(t) v_h ds + \int_{\Omega} f(t) v_h ds \right)$$

En appliquant cette formule au point $t_n = 0$ et en remplaçant, on est amené à résoudre un problème variationnel pour obtenir une valeur approchée de u_h^1

Trouver $u_h^1 \in V_h^k$ tel que $\forall v_h \in V_h^k$

$$\int_{\Omega} u_h^1 v_h dx = \int_{\Omega} u_{0,h} v_h dx + \Delta t \int_{\Omega} u_{1,h} v_h dx \tag{11}$$

$$+ \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \left(\int_{\Omega} \nabla u_h(0) \nabla v_h dx + \int_{\Gamma_2} u_{1,h} v_h ds + \int_{\Gamma_3} g_2(0) v_h ds + \int_{\Omega} f(0) v_h ds \right)$$

3.4.5 Condition de stabilité

Pour l'équation des ondes homogène, une condition suffisante de stabilité est la conservation d'énergie. On considère le schéma discret sans terme source avec des conditions de Dirichlet homogènes. On définit la quantité suivante comme l'énergie discrète du système :

$$E_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\|u_h^{n+1} - u_h^n\|_2^2}{\Delta t} + \frac{1}{2} a(u_h^n, u_h^{n+1})$$

Avec la forme bilinéaire

$$a(u_h^n, v_h^{n+1}) = \int_{\Omega} c^2 \nabla u_h^n \nabla v_h^{n+1} dx$$

On peut tout d'abord montrer que cette quantité se conserve au cours du temps. On considère l'équation des ondes discrétisée sous forme variationnelle. De manière similaire au cas continu, on prend comme fonction test $\frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t}$ qui est cette fois-ci une approximation d'ordre 2 de la dérivée de u en temps on a

$$\int_{\Omega} \left(\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t} + a(u_h^n, \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t}) dx = 0$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t^2} \right) \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{2\Delta t} \right) dx + \int_{\Omega} \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t^2} \right) \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) dx \\ & - \int_{\Omega} \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{2\Delta t} \right) dx - \int_{\Omega} \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) dx \\ & + \frac{1}{2\Delta t} a(u_h^n, u_h^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta t} a(u_h^n, u_h^{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

En multipliant l'équation par $2\Delta t$ on obtient

$$\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \|^2 - \| \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t} \|^2 + a(u_h^n, u_h^{n+1}) - a(u_h^n, u_h^{n-1}) = 0$$

Ce qui donne finalement

$$E_h^{n+\frac{1}{2}} = E_h^{n-\frac{1}{2}}, \quad \forall n.$$

On aurait eu le même résultat si on avait pris $\theta \neq 0$, dans le cas implicite. Il existe cependant une condition de stabilité, on propose de la montrer en considérant dans un premier temps u_h^n dans l'expression du gradient avec $\theta = 0$. On rappelle la formule suivante :

$$a(u, v) = \frac{1}{4} a(u+v, u+v) - \frac{1}{4} a(v-u, v-u)$$

Et on utilisera l'inégalité inverse [4]

$$\exists C_{inv} > 0, \quad \int_{\Omega} |v_h|^2 dx \geq \frac{C_{inv}}{h^2} \int_{\Omega} |\nabla v_h|^2 dx \quad \forall v_h \in V^h(\Omega)$$

Cette inégalité est une équivalence de norme qui est vraie en dimension finie. On a alors

$$\begin{aligned} E_h^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \frac{\|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2}{\Delta t} + \frac{1}{8} a(u_h^n + u_h^{n+1}, u_h^n + u_h^{n+1}) - \frac{1}{8} a(u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n) \\ E_h^{n+\frac{1}{2}} &\geq \frac{1}{2} \frac{\|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2}{\Delta t} - \frac{1}{8} a(u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n) \\ E_h^{n+\frac{1}{2}} &\geq \frac{1}{2} \frac{\|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2}{\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{8} a\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}\right) \\ E_h^{n+\frac{1}{2}} &\geq \frac{1}{2} \frac{\|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2}{\Delta t} - \frac{\Delta t^2 C_{inv}}{8h^2} \frac{\|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2}{\Delta t^2} \\ E_h^{n+\frac{1}{2}} &\geq \frac{1}{2} \frac{\|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2}{\Delta t} \left(1 - \frac{c^2 \Delta t^2 C_{inv}}{4h^2}\right) \end{aligned}$$

On a donc comme condition suffisante de stabilité $\frac{c^2 \Delta t^2 C_{inv}}{4h^2} < 1$. La constante C_{inv} dépend du domaine et n'est pas toujours facile à calculer. Faisons désormais le même calcul mais en remplaçant u_h^n par $\theta u_h^{n+1} + (1-2\theta)u_h^n + \theta u_h^{n-1}$

$$E_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2}{\Delta t} + \frac{1}{2} a(\theta u_h^{n+1} + (1-2\theta)u_h^n + \theta u_h^{n-1}, u_h^{n+1})$$

D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned} & a(\theta u_h^{n+1} + (1-2\theta)u_h^n + \theta u_h^{n-1}, u_h^{n+1}) \\ &= a(\theta u_h^{n+1} - 2\theta u_h^n + \theta u_h^{n-1}, u_h^{n+1}) + a(u_h^{n+1}, u_h^n) \\ &= \theta a(u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+1}) + \theta a(u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+1}) + a(u_h^{n+1}, u_h^n) \\ &= \theta a(u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n) + \theta a(u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^n) + \theta a(u_h^{n-1} - u_h^n, u_h^{n+1}) + a(u_h^{n+1}, u_h^n) \end{aligned}$$

Avec $\theta a(u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^n) + \theta a(u_h^{n-1} - u_h^n, u_h^{n+1}) \leq 0$. Ce qui nous donne finalement

$$\begin{aligned} E_h^{n+\frac{1}{2}} &\geq \frac{1}{2} \frac{\|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2}{\Delta t} + \frac{1}{2} [\theta a(u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n) + a(u_h^{n+1}, u_h^n)] \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{\|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2}{\Delta t} \left[1 + \left(\theta - \frac{1}{4} \right) \frac{c^2 \Delta t^2 C_{inv}}{h^2} \right] \end{aligned}$$

On a alors montré que l'énergie du système reste constante et bien positive tant que la condition $\theta \geq 1/4$ est vérifiée. En particulier, il n'y a pas de conditions sur les pas de temps et d'espace, la stabilité ne dépend pas du pas de temps pour $\theta \geq 1/4$. Autrement, il y a une condition CFL à respecter :

$$\begin{aligned} \left(\theta - \frac{1}{4} \right) \frac{c^2 \Delta t^2 C_{inv}}{h^2} &\geq -1 \\ \frac{c^2 \Delta t^2 C_{inv}}{h^2} &\leq \frac{1}{\left(\frac{1}{4} - \theta \right)} \end{aligned}$$

3.5 Implémentation

3.5.1 Code de résolution

Nous utiliserons le langage FreeFem++ [6] afin d'implémenter les schémas numériques obtenus. Freefem++ permet de résoudre aisément les formulations variationnelles. Il nous faut alors gérer la discrétisation en temps et la boucle d'itération qui vient avec. Pour l'équations des ondes acoustiques, on peut écrire un programme qui fonctionne de la manière suivante :

Algorithm 4 Fonctionnement d'un code de résolution générique pour l'équation des ondes

1: **Initialisation des paramètres**

Définition de l'intervalle temps et de Δt

Définition des paramètres de l'équation et du terme source

2: **Maillage**

Définition de la géométrie du domaine avec la fonction *border*

Choix du nombre de point de discrétisation sur chacun des bords du domaine.

Appel de la fonction *mesh*

3: **Définition de l'espace fonctionnel de résolution**

Définition de l'espace des éléments finis

Déclaration de u $u1$ $u2$ qui contiendront les valeurs de u_h^{n+1} , u_h^n , u_h^{n-1}
à chaque pas de temps

Déclaration de v qui servira dans le calcul de u à chaque pas de temps

4: **Formulation variationnelle**

Définition de la formulation variationnelle à l'aide de *problem* sous la forme $A(u,v) - L(v)$

5: **Résolution**

Initialisation de $u1$

Initialisation de $u2$ à l'aide de (11)

Pour i de 2 à Nt

Appel de *solve* \triangleright Permet de résoudre la formulation variationnelle et calcule u_h^{n+1}

$u1 \leftarrow u2$

$u2 \leftarrow u$

plot(u)

Fin pour

Pour le maillage dans le cas où le domaine est carré, on peut appeler la fonction *square*.

3.5.2 Etude numérique de la convergence

Pour vérifier la convergence de notre schéma numérique on peut mettre au point un code de calcul de l'erreur. Il faut donc prendre une solution particulière vérifiant les conditions aux limites. On définit l'erreur par:

$$E_\infty(T) = \max_{i,j} |u(x_{ij}, T) - w(x_{ij}, T)| \quad (12)$$

Ce choix se fait en référence au travail effectué par Lim, Kim et Douglas [8], il aurait été possible de considérer une erreur issue de la norme L^2 . On met au point un programme qui fonctionne de la manière suivante :

Algorithm 5 Calcul de l'erreur

1: **Initialisation**

Définition des paramètres de l'équation
 Choix initial pour les pas de temps et d'espace
 Choix de N

2: **Calcul de l'erreur**

Pour i **de** 1 **à** N

Résolution suivant le modèle de l'algorithme 4
 Définition de la solution exacte
 Calcul de l'erreur
 On multiplie les pas d'espace et de temps par 2

Il nous faut alors choisir une solution particulière [8]. On considère le domaine $\Omega = [-1, 1]^2$ avec $T = 1$ et $c = 1$ On se donne la solution avec une fréquence de $\omega = 4\pi$

$$u(x, y, t) = \frac{\sin(\omega(x^2 + y^2 - 2t))}{\omega}, \quad \forall (x, y, t) \in \Omega \times [0, T]$$

vérifiant les conditions absorbantes. On a alors

$$u_0(x) = \frac{\sin(\omega(x^2 + y^2))}{\omega}, \quad u_1(x) = -2 \cos(\omega(x^2 + y^2)), \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

et le terme source

$$f(x, t) = (4\omega((x^2 + y^2 - 4)\omega \sin(\omega(x^2 + y^2)) - 4 \cos(\omega(x^2 + y^2))) \quad \forall (x, y, t) \in \Omega \times [0, T]$$

3.5.3 Ordre de convergence estimé

On calcule numériquement l'erreur et l'ordre correspondant pour différentes valeurs de θ :

Table 1: Estimation de l'ordre de convergence suivant θ

$(\Delta t, h)$	$\theta = 0.25$		$\theta = 0.5$	
	$E_\infty(T = 1)$	Ordre observé	$E_\infty(T = 1)$	Ordre observé
(0.02, 0.04)	4.44E-02		2.45E-02	
(0.01, 0.02)	1.32E-02	1.83	8.63E-03	1.69
(0.005, 0.01)	3.93E-03	1.84	2.59E-03	1.82
(0.0025, 0.005)	7.93E-04	2.22	1.03E-03	1.59

On s'attendait à observer un ordre 2. Les résultats numériques permettent néanmoins de confirmer la convergence, même s'il reste un doute sur l'ordre 2.

3.6 Exemples

3.6.1 Illustration pour les conditions absorbantes

Pour observer l'efficacité des conditions absorbantes, on peut effectuer une simulation avec les paramètres suivants :

On choisit $\Omega = [-250, 250]^2$ et $T = 0.3s$. On utilise comme source la fonction

$$f(x, t) = g(t) \exp(-30(x_1^2 + x_2^2)) \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T]$$

où

$$g(t) = -2\pi^2\omega^2(2(\pi\omega)^2(t - t_0)^2 - 1) \exp(-\pi^2\omega^2(t - t_0)^2) \quad \forall t \in [0, T]$$

La fonction g est une ondelette de Ricker qui est la dérivée seconde d'une gaussienne. Elle permet de fixer un contenu fréquentiel sur la solution. Le paramètre t_0 permet d'imposer un décalage en temps et ω représente la fréquence. On choisit $\omega = 30s^{-1}$, $t_0 = 0.05s$ et $c = 1500m.s^{-1}$.

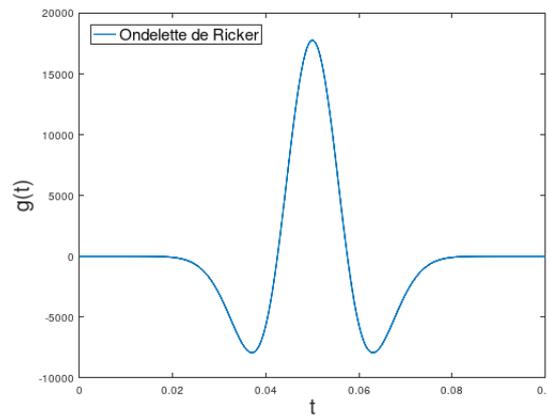


Figure 7: Représentation d'une ondelette de Ricker avec $\omega = 30s^{-1}$, $t_0 = 0.05s$

On effectue deux simulations différentes avec 600 points de discrétisation en temps et 300 en espace. L'une où l'on impose des conditions de dirichlets homogènes (a) et l'autre des conditions absorbantes (b). On observe les résultats suivants :

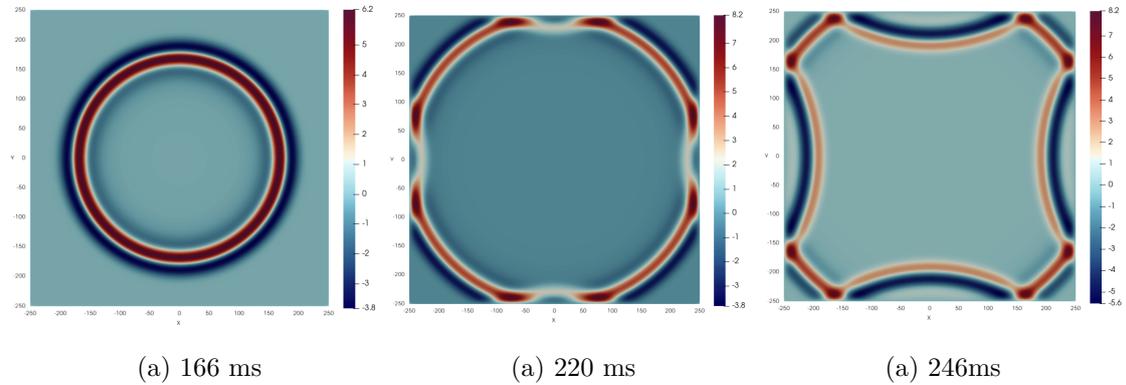


Figure 8: Captures d'écrans pour la solution sans conditions absorbantes

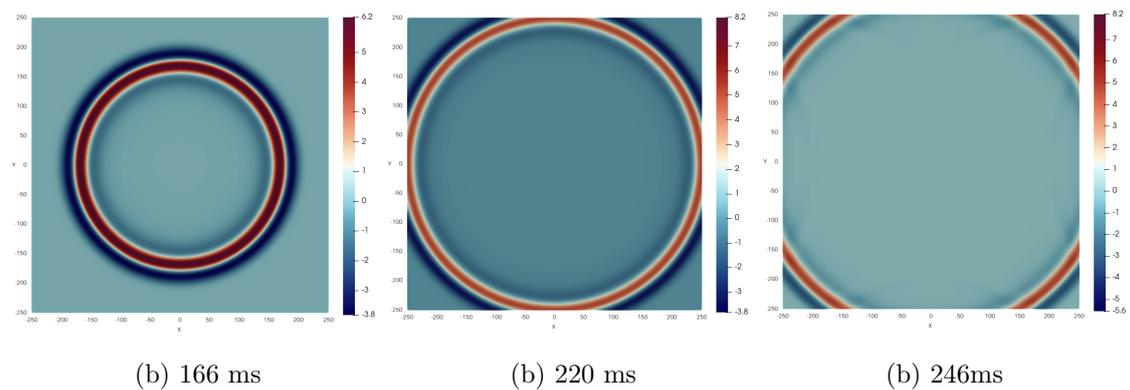


Figure 9: Captures d'écrans pour la solution avec conditions absorbantes

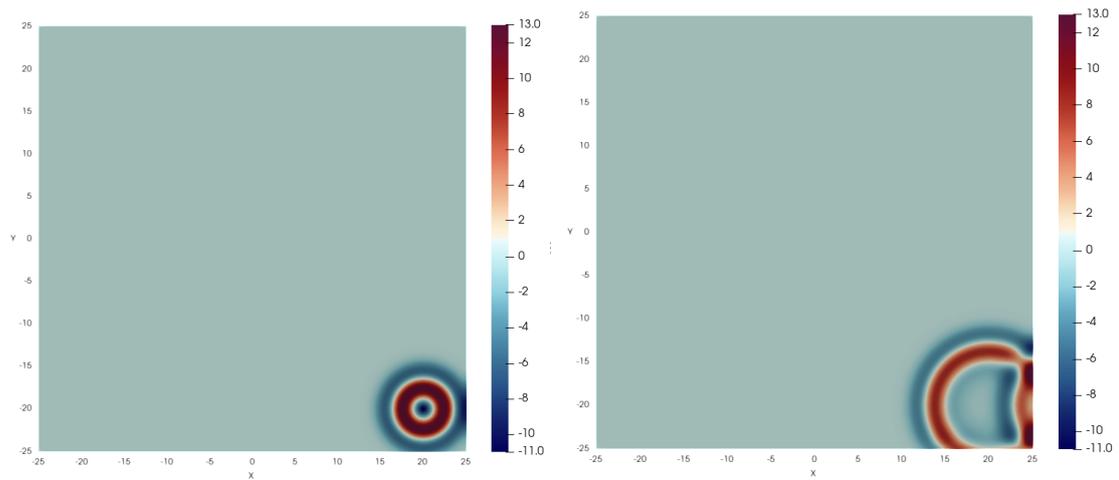
Pour $t = 166$ ms les deux simulations donnent le même résultat puisque l'onde n'a pas encore atteint les bords. En revanche à $t = 220$ ms, on observe une légère réflexion sur (a), ce qui est confirmé par l'observation suivante où la partie du front d'onde en contact avec le bord est totalement réfléchi. Sur (b) l'effet d'absorption attendu a bien lieu, on n'observe pas de réflexion significative.

3.6.2 Onde réfléchié par des conditions de Neumann

On choisit $\Omega = [-25, 25]^2$ et $T = 0.25s$. On utilise comme source la fonction

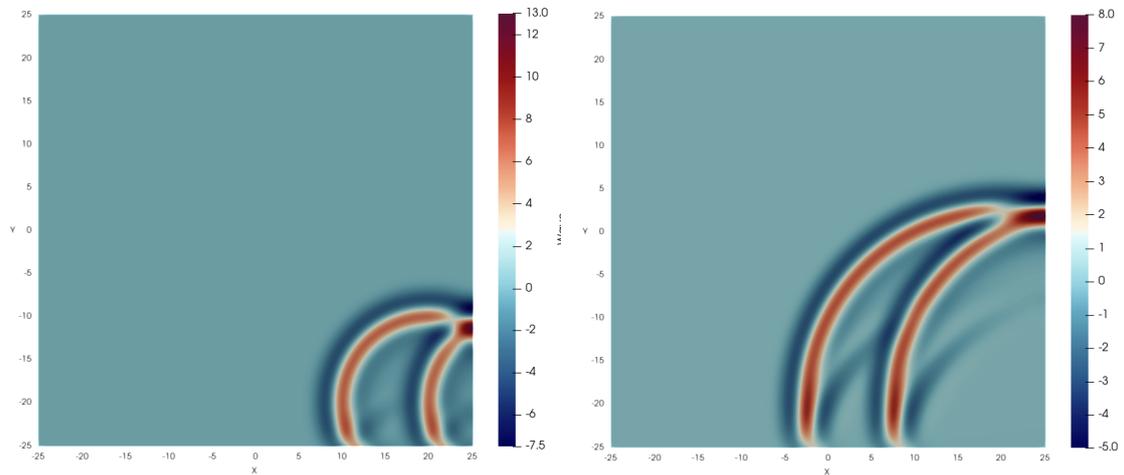
$$f(x, t) = g(t) \exp(-30((x_1 - 20)^2 + (x_2 + 20)^2)) \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T]$$

Avec $c = 150m.s^{-1}$, g et les autres paramètres sont les mêmes que dans l'exemple précédent. Cette fois-ci, la source est située au point $(20, -20)$ de façon à observer rapidement l'effet des conditions aux limites. On impose des conditions Neumann sur $\Gamma_3 = \{(x, y) \in \Omega | x = 25\}$. Et des conditions absorbantes sur les autres bords : $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \{\Gamma_3\}$. On utilise 500 points en temps et 300 en espace.



(a) 75 ms

(b) 98 ms



(c) 123 ms

(d) 206 ms

Figure 10: Captures d'écrans de la solution à des temps différents

Sur (b), le front d'onde entre en contact de deux des bords du domaine. Sur le bord où l'on a imposé des conditions de Neumann, l'onde n'est pas absorbée. On peut voir sur (c) qu'elle est réfléchi. De même que pour la première onde, la partie du front qui entre en contact avec le bord du bas est absorbée.

4 L'équation des ondes en dimension 2 avec des termes d'amortissement

Dans cette partie, on propose un modèle avec les termes d'amortissement. On considère dans un premier temps un modèle simple avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Dans l'optique de reproduire l'expérience introduite par [10], il sera nécessaire de traiter les réflexions induites par les bords du domaine de simulation. Pour ça, on fera le choix d'introduire des *Perfectly matched layers* avec pour référence un modèle issu de [11].

4.1 Modèle avec les conditions aux limites

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \eta \frac{\partial u}{\partial t} \operatorname{div}(\nabla u(x, t)) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \operatorname{div}(\nabla u(x, t)) = f(x, t) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in]0, T[\quad (13)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (14)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in]0, T[\times \Gamma \quad (15)$$

Où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ .
On a donc ajouté le terme $\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$ et le terme $\eta \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \nabla u$ qui est un terme d'ordre 3. Il devrait être dominant et changer le caractère de l'équation. En pratique, il est censé agir comme une perturbation sur l'équation des ondes qui garderait sa propriété de propagation à vitesse finie. (15) correspond à des conditions de Dirichlet homogènes.

4.2 Formulation variationnelle

4.2.1 Estimation d'énergie

Les termes additionnels ont donc pour rôle d'atténuer en partie l'amplitude de l'onde, on s'attend à ce que l'énergie du système décroisse au cours du temps. On multiplie (13) par $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$, en intégrant sur Ω et en utilisant les conditions aux limites (15), on obtient en considérant le terme source nul :

$$\int_{\Omega} \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx + \int_{\Omega} \eta \nabla u(x, t) \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \nabla u(t) \right\|^2 &= -\frac{1}{2} \eta \frac{d}{dt} \left(\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|^2 \right) - \gamma \frac{1}{2} \left\| \nabla u(t) \right\|^2 \\ \frac{d}{dt} E(u, t) &= -\frac{1}{2} \eta \frac{d}{dt} \left(\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|^2 \right) - \gamma \frac{1}{2} \left\| \nabla u(t) \right\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

La variation d'énergie est donc bien négative pour tout t , l'énergie décroît.

4.2.2 Problème continu

Puisqu'on a imposé des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, on considère l'espace de Sobolev $V = H_0^1(\Omega)$. On multiplie alors (13) par une fonction test $v \in V$ puis on intègre sur Ω .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx - \int_{\Omega} \eta \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\nabla u(x, t)) v(x) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) v(x) dx \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u(x, t)) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et les conditions aux limites on a donc la relation suivante

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \eta \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

4.2.3 Problème discret en espace

Pour la discrétisation en espace on procède de la même façon, on introduit une triangulation du domaine \mathcal{T}_h de sorte à avoir :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

avec $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} (|K|)$ Etant donné qu'on a fait le choix de considérer des conditions de Dirichlet homogènes, on utilise l'espace d'approximation suivant:

$$V_h^k(\Omega) = \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega), \forall K, v|_K \in P_k \text{ et } v|_{\Gamma} = 0\}$$

Il s'agit alors de :

Trouver $(u_h)_{n \in [0, N_t]} \in (V_h^k)^{N_t+1}$ tel que $\forall v \in V_h^k$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \gamma u_h v_h dx + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u_h v_h dx + \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \eta \nabla u_h \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f(t) v_h dx \quad (16)$$

Avec les conditions initiales :

$$u(\cdot, 0) = u_{0,h} \text{ et } \frac{\partial u_h}{\partial t}(\cdot, 0) = u_{1,h} \text{ dans } \Omega \quad (17)$$

où $u_{0,h}$ et $u_{1,h}$ sont des approximations de u_0 et u_1 .

4.2.4 Problème discret en temps

On garde la même discrétisation régulière du temps $(t_n)_n = t_0 + n\Delta t$ pour $n \in [0, Nt]$ avec $Nt\Delta t = T$ et en notant $u_h^n = u_h(t_n)$. On se doit également d'approcher les termes de diffusion et d'amortissement. De façon à conserver l'ordre de notre schéma, on introduit les approximations d'ordre 2 similaires à celles utilisées par Lim, Kim et Douglas [8]:

$$\frac{d}{dt} u_h(t_n) \approx \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t} \text{ et } \frac{d}{dt} \nabla u_h(t_n) \approx \frac{\nabla u_h^{n+1} - \nabla u_h^{n-1}}{2\Delta t}$$

Pour les autres termes on garde les mêmes approximations que pour le modèle acoustique, on écrit alors le problème :

Trouver $(u_h)_{n \in [0, N_t]} \in (V_h^k)^{N_t+1}$ tel que $\forall v \in V_h^k$

$$\begin{aligned} \gamma \int_{\Omega} \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t} dx + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} v_h dx + \int_{\Omega} \nabla(\theta u_h^{n+1} + (1-2\theta)u_h^n + \theta u_h^{n-1}) \nabla v_h dx \\ + \int_{\Omega} \frac{\nabla u_h^{n+1} - \nabla u_h^{n-1}}{2\Delta t} \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f(t_n) v_h dx \end{aligned}$$

Qu'on écrit de nouveau sous la forme :

Trouver $u_h :]0, T[\rightarrow V_h^k$ tel que $\forall v \in V_h^k$ avec $\forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} \gamma \int_{\Omega} \frac{u_h^{n+1}}{2\Delta t} v_h dx + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{u_h^{n+1}}{\Delta t^2} v_h dx + \int_{\Omega} \nabla(\theta u_h^{n+1}) \nabla v_h dx + \int_{\Omega} \frac{u_h^{n+1}}{2\Delta t} \nabla v_h dx \\ = \int_{\Omega} f(t_n) v_h dx + \gamma \int_{\Omega} \frac{u_h^{n-1}}{2\Delta t} v_h dx - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{-2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} v_h dx \\ - \int_{\Omega} [(1-2\theta) \nabla u_h^n \theta \nabla u_h^{n-1}] v_h dx + \int_{\Omega} \nabla u_h^{n-1} \nabla v_h dx \end{aligned}$$

Avec u_h^0 et u_h^1 qu'il faut initialiser. On a donc une formulation variationnelle de la forme $A(u_h^{n+1}, v_h) = L(v_h)$ à résoudre à chaque pas de temps.

4.2.5 Initialisation

On veut approcher u_h^1 avec une formule d'ordre 2. Un développement de Taylor donne

$$u_h^1 = u_{0,h} + \Delta t u_{1,h} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} u_h(0) + O(\Delta t^4)$$

En reprenant (13) on a l'expression

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \left(f(x, t) + \operatorname{div} \nabla u(x, t) + \eta \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \nabla u(x, t) - \gamma \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right)$$

On peut alors écrire sous forme variationnelle et en considérant la discrétisation en espace

$$\frac{d}{dt^2} \int_{\Omega} u_h(0) v_h = \int_{\Omega} f(0) v_h dx - \int_{\Omega} \nabla u(0) \nabla v_h dx - \eta \int_{\Omega} \nabla u_h(1) \nabla v_h dx - \gamma \int_{\Omega} u_{1,h} v_h dx$$

Finalement pour initialiser u_h^1 on doit résoudre le problème variationnel

Trouver $u_h^1 \in V_h^k$ tel que $\forall v_h \in V_h^k$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_h^1 v_h dx = \int_{\Omega} u_{0,h} v_h dx + \Delta t \int_{\Omega} u_{1,h} v_h dx \\ + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \left[\int_{\Omega} f(0) v_h dx - \int_{\Omega} \nabla u(0) \nabla v_h dx - \eta \int_{\Omega} \nabla u_h(1) \nabla v_h dx - \gamma \int_{\Omega} u_{1,h} v_h dx \right] \end{aligned}$$

4.2.6 Vérification

On choisit la solution analytique suivante sur $\Omega = (0, 1)^2$ et $T = 1$:

$$u(x, y, t) = (1 + 0.5 \sin(\pi^2 t)) \sin(5\pi x) \sin(3\pi y), \quad (x, y, t) \in \Omega \times]0, T[$$

qui vérifie (13), (14) et (15) pour $\gamma = \eta = 1$ avec comme terme source et conditions initiales :

$$f(x, y, t) = \pi^2 \sin(5\pi x) \sin(3\pi y) (34 + (0.5 + 17\pi^2) \cos(\pi^2 t) + (17 - 0.5\pi^2) \sin(\pi^2 t))$$

$$u_0(x, y) = \sin(5\pi x) \sin(3\pi y) \text{ et } u_1(x, y) = 0.5\pi^2 \sin(5\pi x) \sin(3\pi y)$$

On observe graphiquement les résultats au temps T :

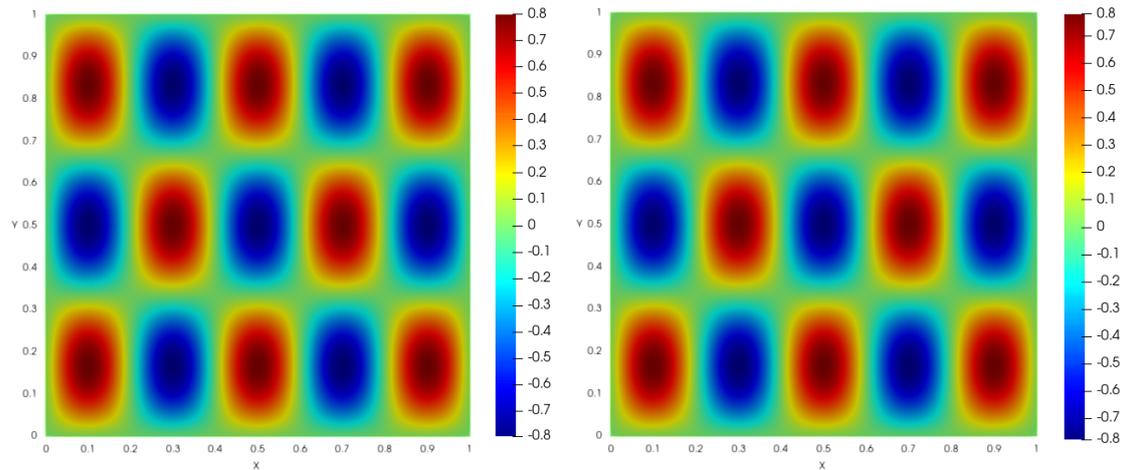


Figure 11: Représentation de la solution numérique (à gauche) et de la solution analytique (à droite) au temps T .

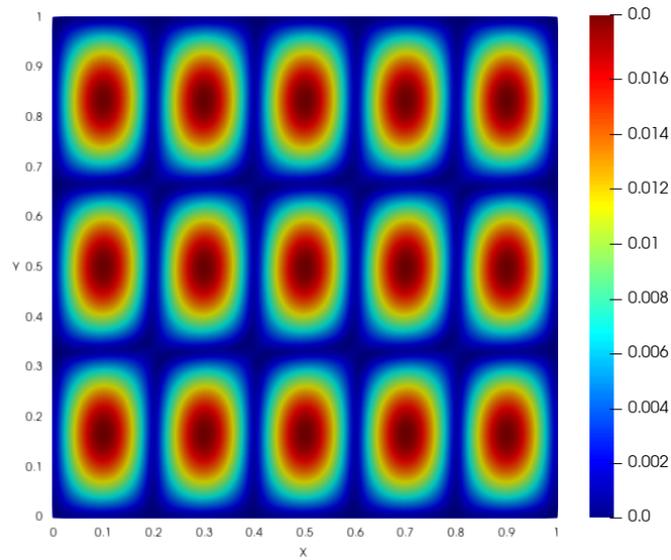


Figure 12: Différence en valeur absolue au temps T entre la solution numérique et la solution analytique.

Les solutions numérique et analytique sont représentées sur la figure 11. On peut observer l'ordre de grandeur de l'erreur au temps T sur la figure 12.

4.2.7 Ordre de convergence estimé

En reprenant la définition (12), on calcule numériquement l'erreur et l'ordre correspondant pour différentes valeurs de θ :

Table 2: Estimation de l'ordre de convergence suivant θ

$(\Delta t, h)$	$\theta = 0.25$		$\theta = 0.5$	
	$E_\infty(T = 1)$	Ordre observé	$E_\infty(T = 1)$	Ordre observé
(0.02, 0.04)	4.91E-2		5.01E-2	
(0.01, 0.02)	1.69E-2	1.70	1.72E-2	1.71
(0.005, 0.01)	6.11E-3	1.66	6.16E-3	1.67
(0.0025, 0.005)	2.40E-3	1.60	2.45E-3	1.59

Les résultats sont en dessous de l'ordre 2 que prévoit la théorie. Malgré plusieurs tentatives, il est possible qu'un bug dans le code n'ait pas été décelé.

4.3 Modèle avec les Perfectly Matched Layers

Une autre façon d'éviter des réflexions non désirées sur les bords est d'introduire une couche artificielle autour du domaine ayant pour rôle d'atténuer l'amplitude de l'onde. On peut par exemple penser à imposer 0 comme vitesse dans cette zone là. Seulement, on constate toujours des réflexions entre le domaine observé et la couche artificielle. Il existe une méthode ayant pour but de pallier ce problème en introduisant ce qui est appelé des *perfectly matched layers* (PML). Puisqu'il n'existe pas de modèle connu avec des CLA pour l'équation des ondes avec les deux termes additionnels, c'est cette méthode que nous allons utiliser. La mise en oeuvre des PML pour l'équation des ondes sous sa forme du deuxième ordre en temps présente des difficultés pour obtenir une formulation qui soit à la fois locale en temps et stable. Une solution a été proposée par Grote et Sim [5] en introduisant des fonctions auxiliaires qui sont solutions d'équations différentielles du premier ordre (pour chaque point d'espace). Cette solution a été généralisée par Zhao et Xu [11] pour le modèle avec les termes diffusifs et visqueux (sans analyse mathématique). C'est cette généralisation qui sera utilisée par la suite.

4.3.1 Système d'équations avec PML

On reprend le système d'équations donné dans l'article de Zhao et Xu [11]. On introduira des approximations pour les dérivées en temps dans la partie discrétisation. On considère le domaine $\Omega \times]0, T[$ où $\Omega = [-a_1 - L_1, a_1 + L_1] \times [-a_2 - L_2, a_2 + L_2]$. L_1 et L_2 représente l'épaisseur des layers suivant x et y .

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + (\xi_1 + \xi_2 + \gamma) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + [\xi_1 \xi_2 + \gamma(\xi_1 + \xi_2)] u(x, t) \\ + c^2 \operatorname{div} \nabla u(x, t) + \eta \nabla \cdot \phi(x, t) - \gamma \xi_1 \xi_2 \psi(x, t) + c^2 = f(x, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) = \Gamma_1 \phi(x, t) + \Gamma_2 \nabla u \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = u(x, t) \end{cases}$$

Les fonctions ϕ et ψ sont des inconnues auxiliaires. Elles permettent de conserver la forme initiale de l'équation. Ce système est valable pour tout $(x, t) \in \Omega \times [0, T[$ avec

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} -\xi_1 & 0 \\ 0 & -\xi_2 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \xi_2 - \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_1 - \xi_2 \end{bmatrix}$$

Les fonctions ξ_1 et ξ_2 sont les fonctions d'atténuations liées aux PML. On choisira

$$\xi_i(x_i) = \begin{cases} 100 \left(\frac{||x_i| - a_i|}{L_i} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi|x_i - a_i|}{L_i}\right)}{2\pi} \right), & \text{pour } a_i \leq |x_i| \leq a_i + L_i, \quad i = 1, 2. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut les représenter sur un domaine carré :

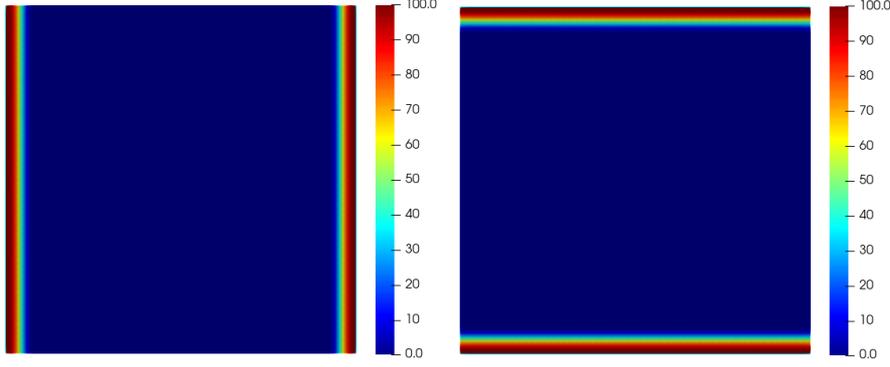


Figure 13: Représentation des fonctions ξ_1 et ξ_2

4.3.2 Formulation variationnelle avec discrétisation en temps et en espace

On met sous forme variationnelle le système et on utilise les approximations suivantes pour les fonctions auxiliaires :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(x, t^n)}{\partial t} &\approx \frac{\psi(x, t^{n+1}) - \psi(x, t^n)}{\Delta t} \\ \frac{\partial \phi_i(x, t^n)}{\partial t} &\approx \frac{\phi_i(x, t^{n+1}) - \phi_i(x, t^n)}{\Delta t}\end{aligned}$$

On en vient à résoudre successivement 4 formulations variationnelles discrètes dans l'espace des éléments finis V_k^h défini précédemment :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\psi_h^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} \right) z dx = \int_{\Omega} u^n z dx, \quad z \in V^h(\Omega) \quad (18)$$

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \int_{\Omega} (\xi_1 + \xi_2 + \gamma) \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t} v dx + \int_{\Omega} [\xi_1 \xi_2 + \gamma(\xi_1 + \xi_2) u_h^n] v dx \\ &+ \eta \int_{\Omega} \frac{\nabla u_h^{n+1} - \nabla u_h^{n-1}}{2\Delta t} \nabla v dx + \int_{\Omega} c^2 \nabla (\theta u_h^{n+1} + (1 - 2\theta) u_h^n + \theta u_h^{n-1}) \nabla v dx \\ &+ \eta \int_{\Omega} \phi^n \nabla v dx + \int_{\Omega} \phi^n \nabla (c^2 v) dx + \int_{\Omega} \gamma \xi_1 \xi_2 \psi^n v dx = \int_{\Omega} f^n v dx, \quad v \in V^h(\Omega) \quad (19)\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\phi_1^{n+1} - \phi_1^n}{\Delta t} w = \int_{\Omega} -\xi_1 \phi_1^n w + \int_{\Omega} c^2 (\xi_2 - \xi_1) \frac{\partial u^n}{\partial x_1} w dx, \quad w \in V^h(\Omega) \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\phi_2^{n+1} - \phi_2^n}{\Delta t} w = \int_{\Omega} -\xi_2 \phi_2^n w + \int_{\Omega} c^2 (\xi_1 - \xi_2) \frac{\partial u^n}{\partial x_2} w dx, \quad w \in V^h(\Omega) \quad (21)$$

Il faut faire attention à la séquence de résolution des problèmes variationnels. Après l'initialisation, on procèdera avec l'ordre suivant pour chaque itération de la boucle en temps : (18) \rightarrow (19) \rightarrow (20) \rightarrow (21). On donne plus de détails dans la partie 6 de l'algorithme 6.

4.3.3 Code de résolution

Notre code de résolution repose sur la résolution successive de formulations variationnelles pour chaque pas de temps. On fait le choix d'initialiser les fonctions auxiliaires ψ , ϕ_1 , ϕ_2 à 0.

Algorithm 6 Code de résolution avec PML

- 1: **Définition des paramètres et fonctions**
 - Définition des paramètres de l'équation
 - Définition du terme source
 - Définition des fonctions d'amortissement
 - Choix de largeur des PML
 - 2: **Discrétisation**
 - Choix du pas de maillage
 - Choix du pas de temps
 - 3: **Définition de l'espace fonctionnel de résolution**
 - Définition de l'espace des éléments finis
 - Déclaration de u_0 , u_1 et u ▷ Contient les valeurs de u_h^{n-1} , u_h^n , u_h^{n+1}
 - Déclaration de psi_1 et psi ▷ Contient les valeurs de ψ^n et ψ^{n+1}
 - Déclaration de phi_1x et phi_x ▷ Contient les valeurs de ϕ_1^n et ϕ_1^{n+1}
 - Déclaration de phi_1y et phi_y ▷ Contient les valeurs de ϕ_2^n et ϕ_2^{n+1}
 - On définit également v qui servira dans le calcul de u à chaque pas de temps
 - 4: **Définition des formulations variationnelles**
 - Définition de $calculu$ avec problem ▷ Correspond à (19)
 - Définition de $calculphi_x$ avec problem ▷ Correspond à (20)
 - Définition de $calculphi_y$ avec problem ▷ Correspond à (21)
 - 5: **Initialisation pour les deux premiers pas de temps**
 - Initialisation de u_0 , u_1 , psi_1 , phi_1 , phi_1y
 - Appel de $calculphi_x$, $calculphi_y$
 - $psi \leftarrow psi_1 + dt \cdot u_1$
 - $phi_1x \leftarrow phi_x$
 - $phi_1y \leftarrow phi_y$
 - $psi_1 \leftarrow psi$
 - 6: **Résolution pour chaque pas de temps**
 - Pour t allant de $2dt$ à $T - dt$** ▷ Correspond à (18)
 - $psy \leftarrow psy_1 + dt \cdot u_1$
 - $calculu$
 - $calculphi_x$
 - $calculphi_y$
 - $psy_1 \leftarrow psy$
 - $phi_1y \leftarrow phi_y$
 - $phi_1x \leftarrow phi_x$
 - $u_0 \leftarrow u_1$
 - $u_1 \leftarrow u$
- Fin Pour**
-

4.3.4 Expérience

Dans cette partie, on cherche à reproduire une expérience introduite par Zhao et Gao [10]. Le but de l'expérience est de simuler la propagation d'une onde traversant un milieu ayant des propriétés différentes caractérisées par les termes d'amortissement et de diffusion nouvellement introduits. Initialement réalisée en utilisant une méthode de différences finies, nous la reproduisons avec une méthode d'éléments finis et des PML.

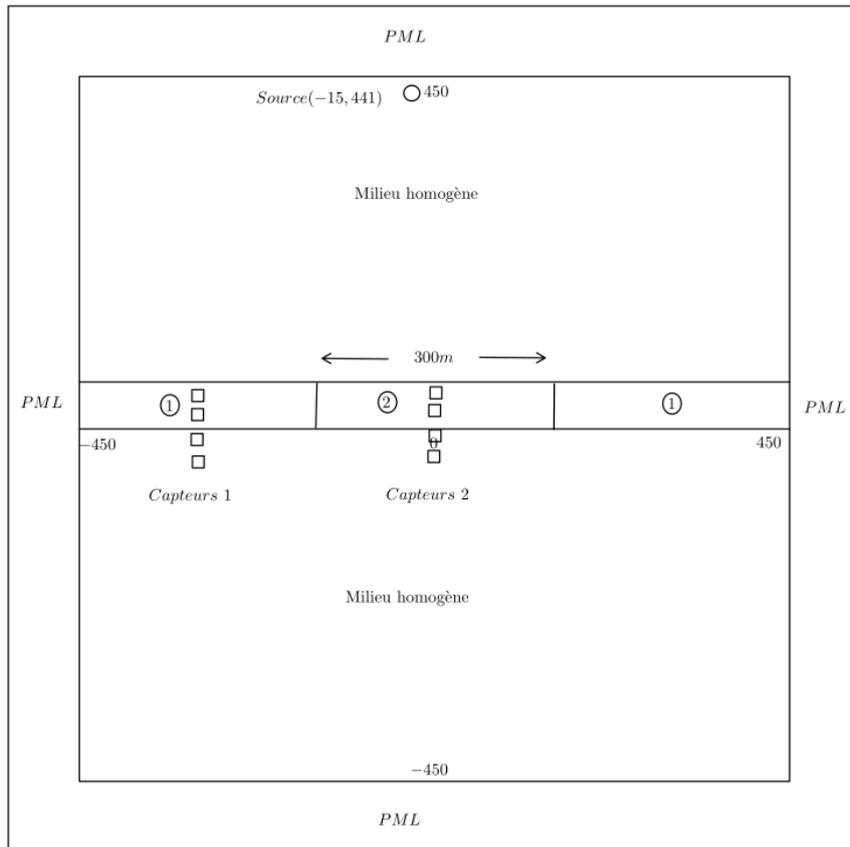


Figure 14: Schéma de l'expérience

On souhaite observer la propagation de l'onde sur un domaine $\Omega = [-450, 450] \times [-450, 450]$ qui lui est entouré de PML. Les milieux annotés (1) correspondent à des milieux saturés en eau, le milieu (2) est saturé en huile. On propose des paramètres pour les caractériser par la suite.

4.3.5 Simulation numérique

On utilisera un pas de temps de $1ms$ et un maillage uniforme comprenant 217800 éléments. Dans un premier temps, on prend pour paramètres les valeurs données dans l'article de Zhao et Gao [10].

Table 3: Paramètres physiques du modèle

Milieu	$\gamma(Hz)$	$\eta(m^2 \cdot s^{-1})$	$c(m \cdot s^{-1})$
Milieu homogène	0.0	0.0	1600
Milieu saturé en eau	90.0	0.02	1470
Milieu saturé en huile	65.4	0.0147	1015

Notre source est une ondelette de ricker multipliée par une gaussienne centrée au point $(15, 441)$. On a multiplié la source par un facteur 10^5 dans un souci d'échelle. On visualise la solution numérique à 3 temps différents pour les deux modèles.

4.3.6 Captures d'écrans

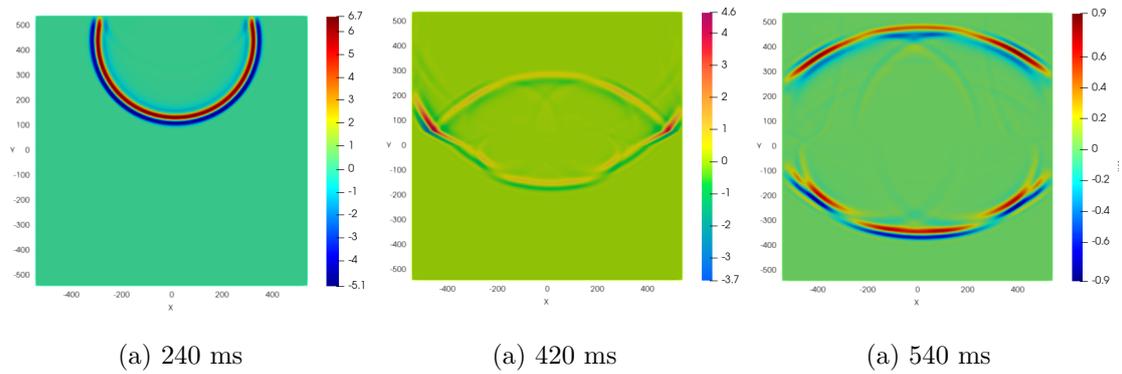


Figure 15: Captures d'images pour le modèle diffus-visqueux

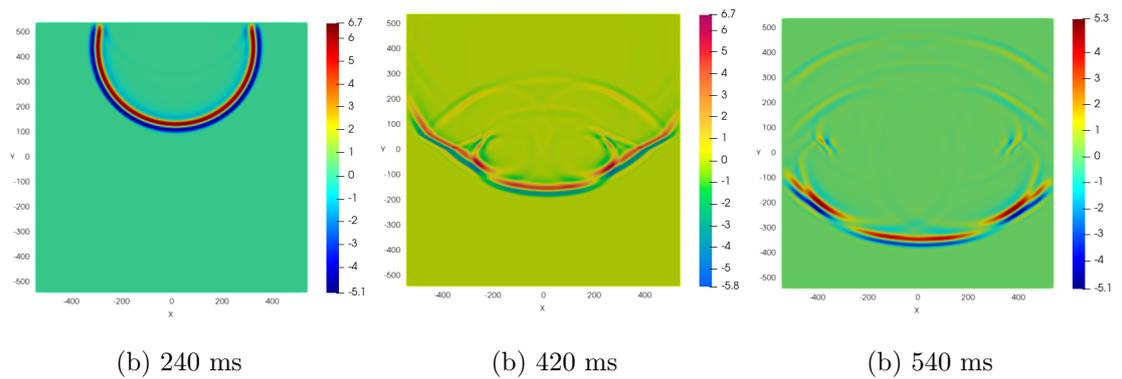


Figure 16: Captures d'images pour le modèle acoustique

Les images (a) correspondent au modèle avec les termes d'amortissements et les images (b) correspondent au modèle acoustique. On n'observe donc aucune différence sur la première image à 240 ms puisque le front d'onde n'est pas entré en contact avec le milieu caractérisé par les termes d'atténuation. Au temps $t = 420$ ms, on observe bien une différence. Une partie du front d'onde a changé de milieu. On peut observer une perte d'amplitude plus importante sur le modèle avec atténuation et également la présence nette d'une onde réfléchie ayant la même amplitude que l'onde incidente. Ce phénomène va se confirmer sur la dernière image où on peut les distinguer d'autant plus clairement. On peut également noter plusieurs réflexions qui ne sont présentes que dans le modèle acoustique. Cet effet est particulièrement visible au temps $t = 420$ ms. On note que l'échelle de couleur varie suivant le temps de simulation. Une représentation en 3D permet de mieux rendre compte de l'effet d'atténuation induit par le modèle avec amortissement :

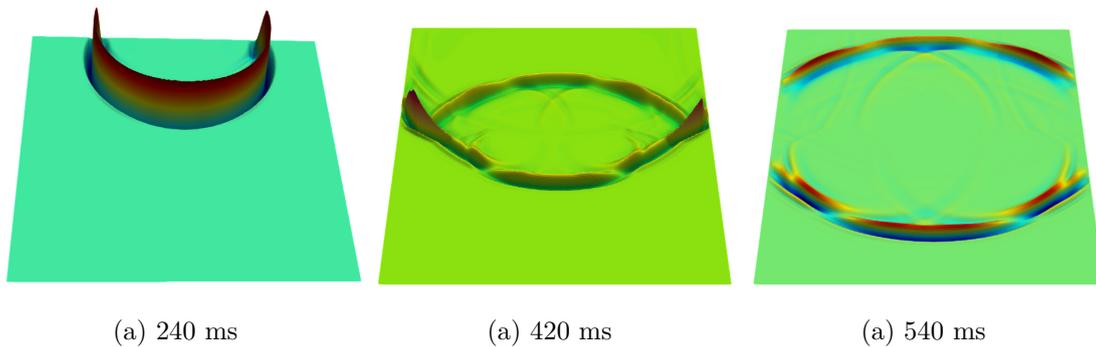


Figure 17: Captures d'images 3D pour le modèle diffus-visqueux

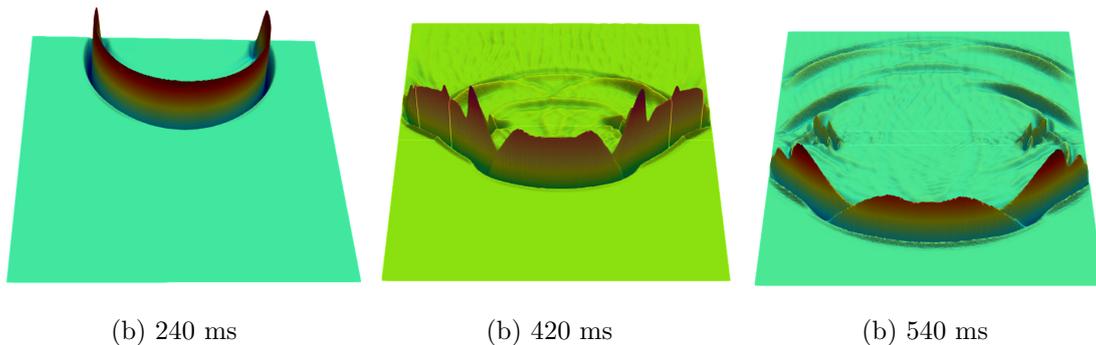
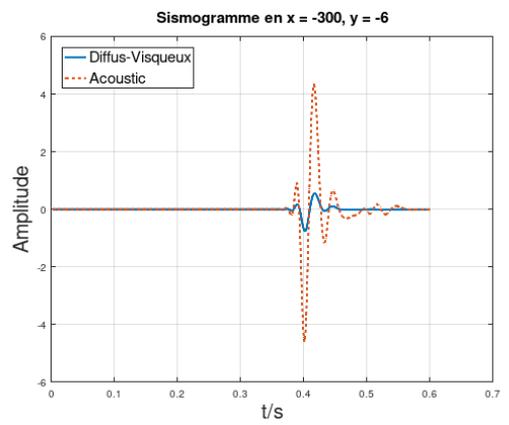
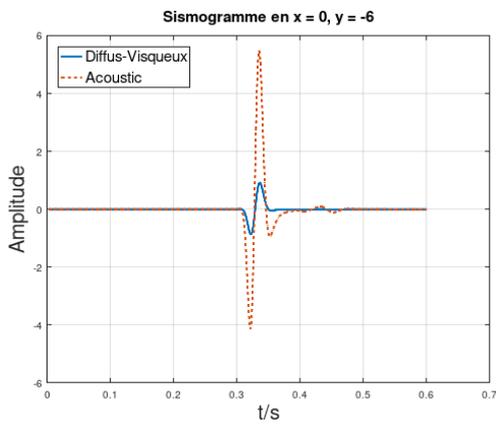
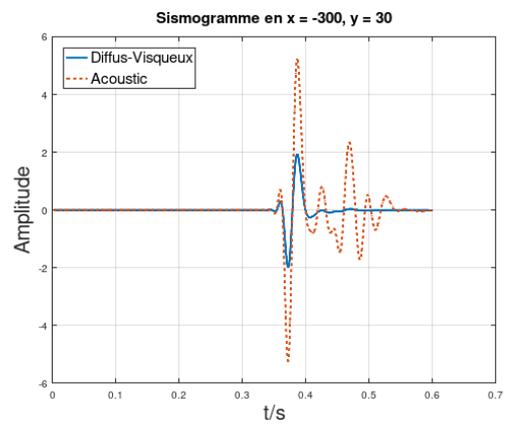
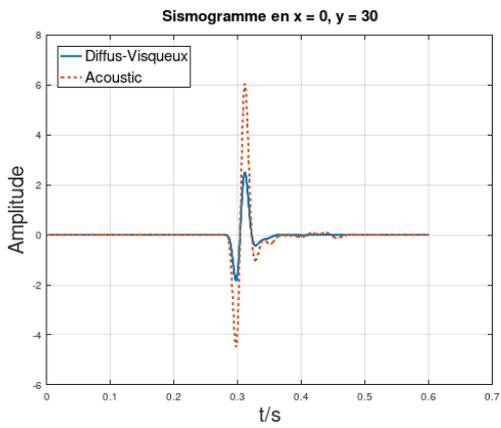
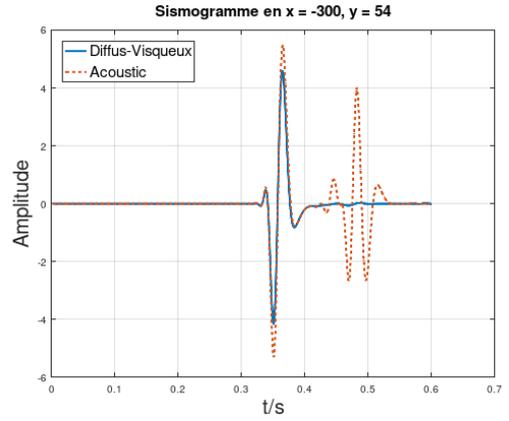
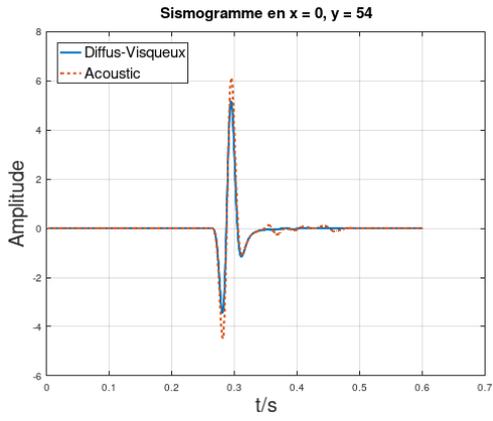


Figure 18: Captures d'images 3D pour le modèle acoustique

4.3.7 Sismogrammes pour les modèles acoustiques et visqueux

Un sismogramme est un graphique produit généralement par un sismographe. Il s'agit d'un enregistrement du mouvement du sol à une station de mesure en fonction du temps. En suivant le même principe, on propose d'observer sur des sismogrammes synthétiques le comportement de l'onde en fonction du temps sur plusieurs points d'espaces choisis. Ils correspondent aux capteurs introduits dans le schéma de l'expérience dans la partie 4.3.4.



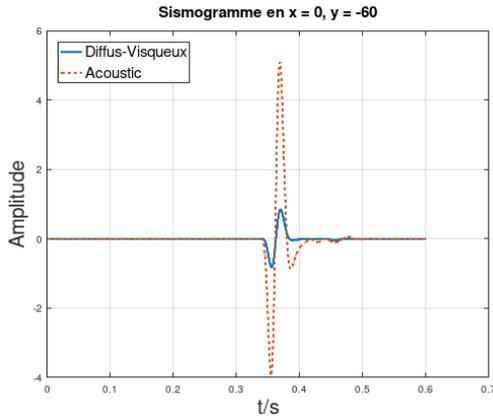


Figure 19: On représente en rouge pointillé le sismogramme issue du modèle acoustique et en bleu celui issu du modèle avec amortissement. Capteurs 2

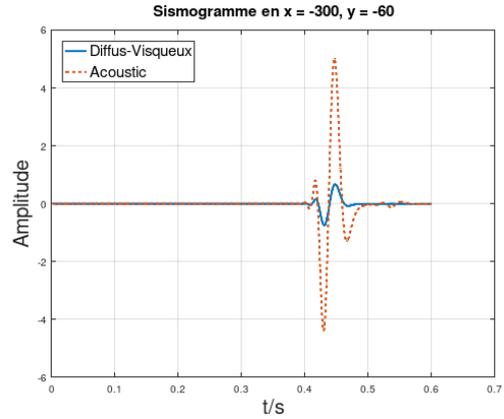


Figure 20: On représente en rouge pointillé le sismogramme issue du modèle acoustique et en bleu celui issu du modèle avec amortissement. Capteurs 1

Chacun des modèles semble produire des résultats conformes à nos attentes. Sur l'ensemble des graphes, on peut s'apercevoir que le modèle avec amortissement permet de réduire l'amplitude de l'onde et d'atténuer grandement les réflexions multiples survenant après le passage de l'onde incidente. Les résultats sont tout à fait conformes à ceux issus de [10].

4.3.8 Contribution de γ et η à l'atténuation de la solution

On souhaiterait désormais voir l'effet de chacun des paramètres de manière indépendante. Pour cela, on commence par fixer $\gamma = 0$ et on observe les résultats suivants :

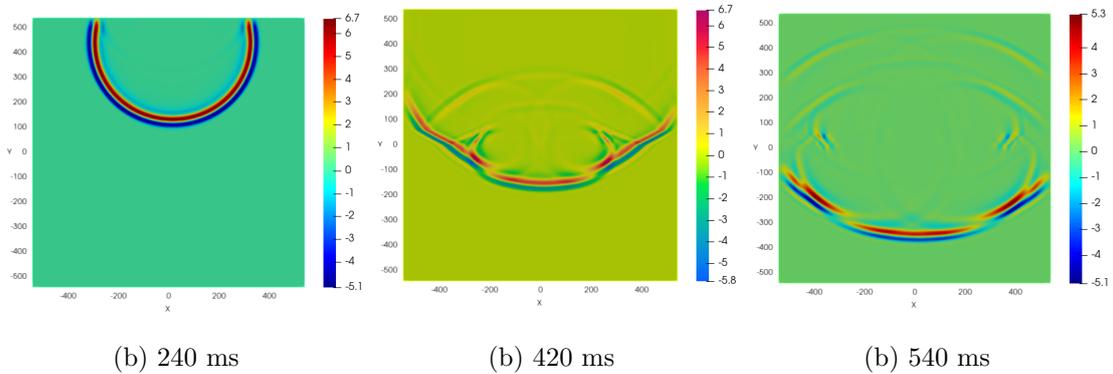


Figure 21: Captures d'images pour le modèle avec $\gamma = 0$

Visuellement, on n'observe aucune différence avec le modèle acoustique, le terme $\eta \frac{\partial}{\partial t} \Delta u$ ne semble pas avoir d'incidence sur le comportement de l'onde. Ce qui est confirmé en observant quelques sismogrammes.

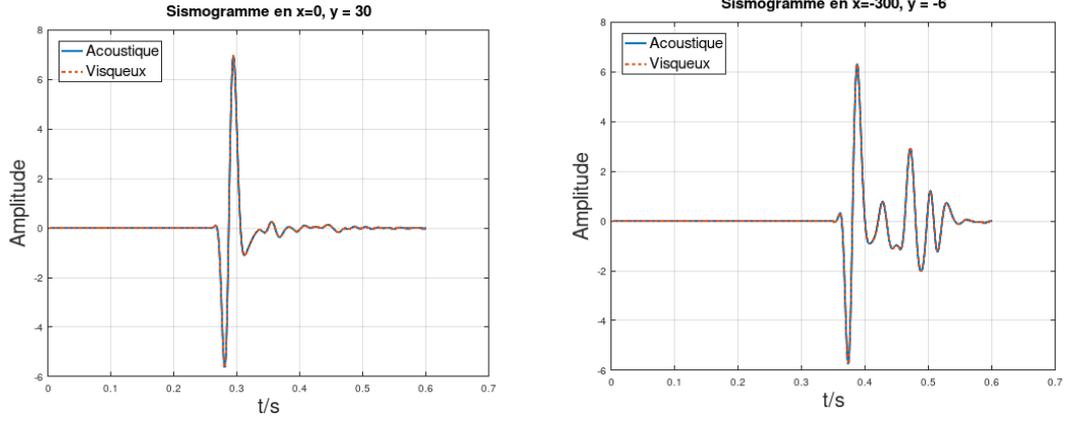


Figure 22: Comparaison du modèle acoustique et visqueux sur sismogrammes.

De la même façon que sur la figure 19 et 20, on a représenté deux sismogrammes synthétiques pour voir le comportement suivant le modèle acoustique et le modèle d'amortissement visqueux avec $\gamma = 0$. Les deux courbes se confondent, ce qui confirme l'observation faite sur la figure 21. On cherche alors à introduire un paramètre sans dimension rendant compte de l'atténuation. Pour cela, on peut chercher u solution de (13) (14) (15) sous la forme d'une onde harmonique d'expression [7]:

$$u = \exp(i\tilde{k}x) \exp(-i\omega t), \quad \tilde{k} = k + i\alpha$$

α représente alors le coefficient d'atténuation. En remplaçant dans (13) on peut obtenir les expressions suivantes :

$$k = k_0 \sqrt{\frac{\sqrt{(1-dg)^2 + (d+g)^2} + 1 - dg}{2(1+g^2)}}$$

$$\alpha = k_0 \sqrt{\frac{\sqrt{(1-dg)^2 + (d+g)^2} - 1 + dg}{2(1+g^2)}}$$

avec

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad d = \frac{\gamma}{\omega}, \quad g = \frac{\omega\eta}{c^2}$$

En considérant une même fréquence et une même vitesse, on peut trouver l'ordre de grandeur du coefficient d'atténuation α pour chacun des paramètres en fixant l'autre à 0. On peut écrire les fonctions suivantes :

Algorithm 7 Calcul de α pour $\eta = 0$

Input: γ, ω, c

Output: $\eta \leftarrow \text{calculalpha}(\gamma, \omega, c)$

1: $d \leftarrow \gamma/\omega$

2: $k_0 \leftarrow \omega/c$

3: $\alpha \leftarrow k_0 \cdot \text{sqrt}((\text{sqrt}(1+d^2) - 1)/2)$

Algorithm 8 Calcul de α pour $\gamma = 0$

Input: η, ω, c **Output:** $\gamma \leftarrow \text{calculalpha2}(\eta, \omega, c)$ 1: $g \leftarrow \eta \cdot \omega / c^2$ 2: $k_0 \leftarrow \omega / c$ 3: $\alpha \leftarrow k_0 \cdot \text{sqrt}((\text{sqrt}(1 + g^2) - 1) / (2 + g^2))$

On a donc pour $\eta = 0.02$, $\alpha = 2.8 \cdot 10^{-9}$ et pour $\gamma = 90$, $\alpha = 2.1 \cdot 10^{-2}$. Ces deux valeurs pour le coefficient d'atténuation rendent compte de l'effet observé. Le paramètre η a un effet négligeable devant celui de γ .

4.3.9 Comparaison de l'amortissement suivant les valeurs de η et γ

Pour étudier indépendamment les deux types d'atténuation, on propose désormais d'autres valeurs pour les paramètres γ et η qui sont choisies de manière à obtenir le même ordre de grandeur pour le coefficient d'atténuation. On va effectuer deux simulations avec les paramètres issus des tables suivantes :

Table 4: Amortissement γ

Milieu	$\gamma(Hz)$	$\eta(m^2 \cdot s^{-1})$	$c(m \cdot s^{-1})$
Milieu homogène	0.0	0.0	1600
Milieu saturé en eau	30	0.0	1470
Milieu saturé en huile	21.6	0.0	1015

Table 5: Amortissement η

Milieu	$\gamma(Hz)$	$\eta(m^2 \cdot s^{-1})$	$c(m \cdot s^{-1})$
Milieu homogène	0.0	0.0	1600
Milieu saturé en eau	0.0	$1.58 \cdot 10^5$	1470
Milieu saturé en huile	0.0	$1.16 \cdot 10^5$	1015

Dans le premier cas, seulement le terme de diffusion est actif, dans l'autre seulement le terme d'amortissement visqueux.

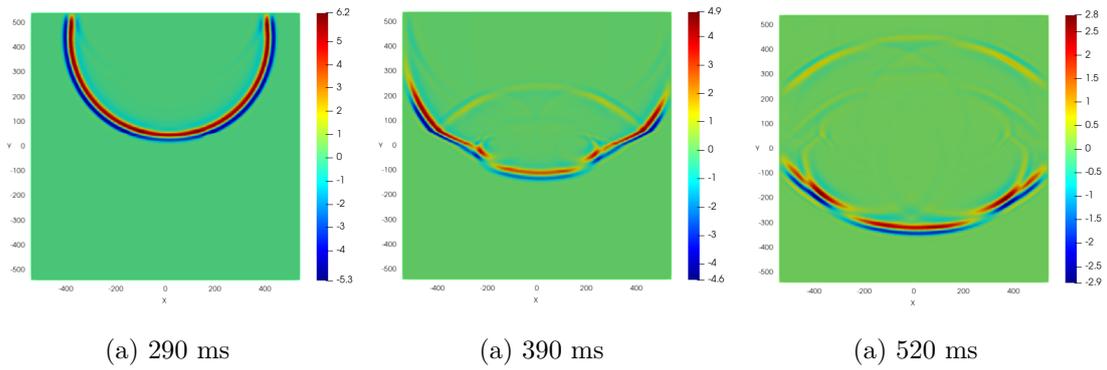


Figure 23: Captures d'images avec amortissement γ

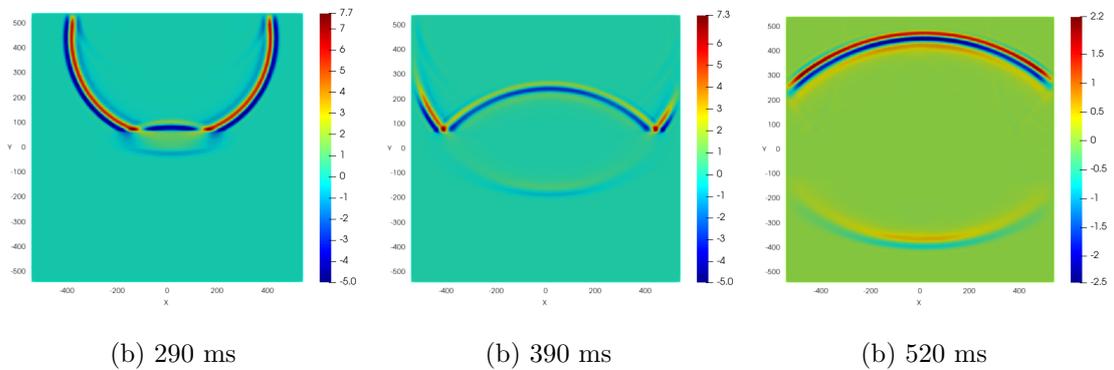


Figure 24: Captures d'images avec amortissement η

A $t = 290$ ms, on peut commencer à voir une différence de comportement suivant les deux paramètres d'amortissement. Lorsque le front d'onde entre en contact avec le milieu saturé en huile, on observe ce qui semble être le début de l'effet de l'amortissement sur la figure 23. En revanche sur la figure 24, l'onde au contact du milieu perd notablement en amplitude jusqu'à prendre des valeurs négatives. A $t = 390$ ms, on peut distinguer une onde réfléchi pour les deux types d'amortissement. Cependant pour le modèle avec amortissement visqueux, l'amplitude de l'onde incidente devient très faible. En revanche l'onde réfléchi se distingue plus clairement et est d'amplitude plus grande. On peut observer plus clairement ce phénomène au temps $t = 520$ ms. Sur la figure 23, l'onde incidente est atténuée mais reste d'amplitude supérieure à l'onde réfléchi. Sur la figure 24, l'onde réfléchi est bien définie et est nettement supérieure en amplitude à l'onde incidente. On note le changement d'échelle de couleur pour chaque instant.

4.3.10 Sismogrammes pour les amortissements γ et η

De la même façon que dans la partie 4.3.7, on regarde le comportement de l'onde pour chacun des effets d'amortissement à certains points d'espace choisis.

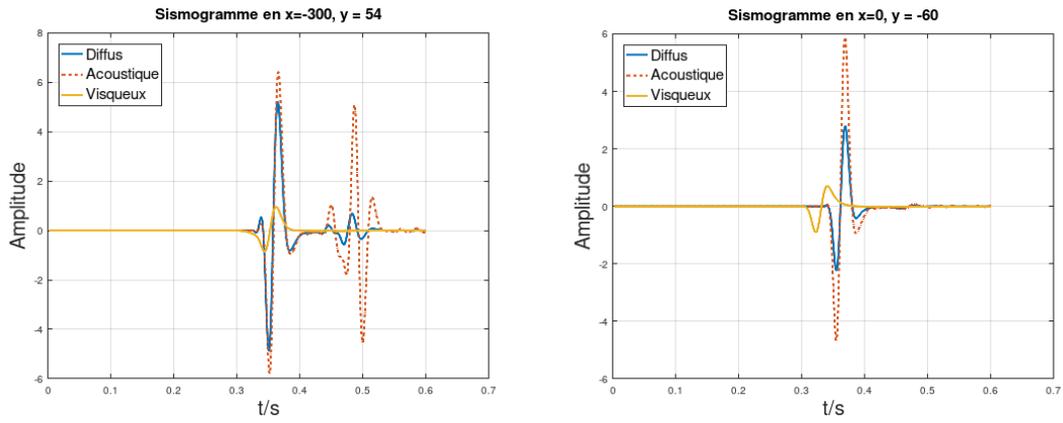


Figure 25: Sismogrammes (Capteurs 1)

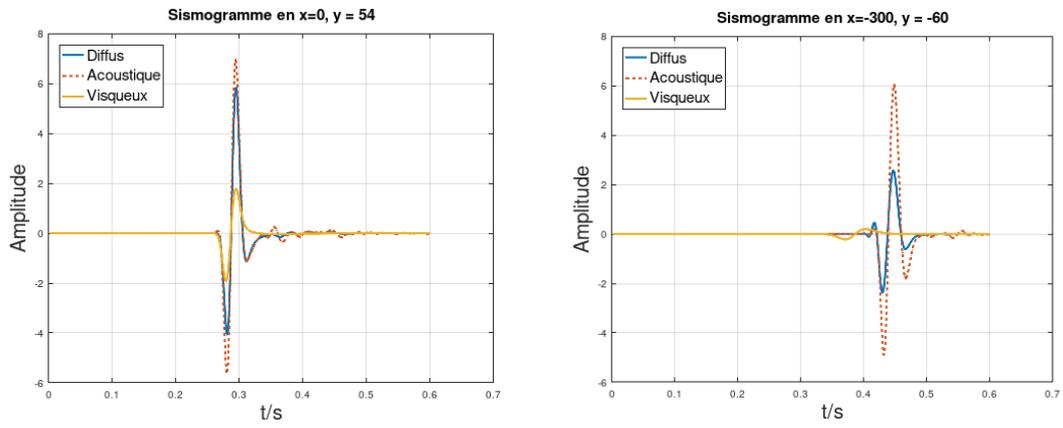


Figure 26: Sismogrammes (Capteurs 2)

Sur les figures 25 et 26, on représente en rouge pointillé le sismogramme pour l'onde acoustique, en bleu pour l'onde amortie par le facteur γ et en jaune l'onde amortie par le facteur η . En plus du phénomène d'atténuation, on peut observer comme une avance de phase pour l'onde visqueuse. Il est pour le moment difficile de donner une interprétation à cet effet-là. Une meilleure compréhension de ces résultats pourrait venir d'une analyse théorique du coefficient de réflexion.

References

- [1] Eliane Bécache. Schéma numérique pour la résolution de l'équation des ondes, 2002.
- [2] Marion Darbas. Cours d'équations aux dérivées partielles, 2022.
- [3] Robert Dautray. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques . Tome 1 / Robert Dautray, Jacques-Louis Lions / Michel Artola, Marc Authier, Philippe Bénilan,...[et al.]*. Collection du Commissariat à l'énergie atomique. Série scientifique. Masson, Paris New York Barcelone[etc, 1984.
- [4] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Eléments finis : Théorie, applications, mise en œuvre*. 2002.
- [5] Marcus J. Grote and Imbo Sim. Efficient PML for the wave equation. *arXiv: Numerical Analysis*, 2010.
- [6] F. Hecht. New development in FreeFem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4):251–265, 2012.
- [7] Valeri Korneev, Gennady Goloshubin, Thomas Daley, and Dmitry Silin. Seismic low-frequency effects in monitoring fluid-saturated reservoirs. *Geophysics*, 69:522–532, 02 2001.
- [8] Hyeona Lim, Seongjai Kim, and Jim Douglas. Numerical methods for viscous and nonviscous wave equations. *Applied Numerical Mathematics*, 57(2):194–212, 2007.
- [9] Frédéric Nataf. Absorbing boundary conditions and perfectly matched layers in wave propagation problems. In *Direct and Inverse problems in Wave Propagation and Applications*, volume 14 of *Radon Ser. Comput. Appl. Math.*, pages 219–231. de Gruyter, 2013.
- [10] Haixia Zhao, Jinghuai Gao, and Jing Zhao. Modeling the propagation of diffusive-viscous waves using flux-corrected transport–finite-difference method. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 7(3):838–844, 2014.
- [11] Haixia Zhao, Wenhao Xu, Jinghuai Gao, Yijie Zhang, and Wenjing Yan. A finite-element algorithm with a perfectly matched layer boundary condition for seismic modelling in a diffusive-viscous medium. *Journal of Geophysics and Engineering*, 19(1):51–66, 01 2022.